Academie de Nantes
Université du Maine

THÈSE DE DOCTORAT

Spécialité
ACOUSTIQUE

Présentée
par
Joël BENSOAM

pour obtenir le grade de
DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DU MAINE

REPRÉSENTATION INTÉGRALE APPLIQUÉE À LA SYNTHÈSE SONORE PAR MODÉLISATION PHYSIQUE

MÉTHODES DES ÉLÉMENTS FINIS

Soutenue le 20 juin 2003

Rapporteurs et membres du jury

B. DUBUS	Chargé de recherche (hab.) CNRS IEMN-ISEN (Rapporteur)
M. RAOUS	Directeur de recherche CNRS LMA (Rapporteur)
M. BRUNEAU	Professeur à l'Université du Maine
M. BONNET	Directeur de recherche CNRS LMS (Polytechnique)
N. JOLY	Maître de conférences à l'Université du Maine
R. CAUSSÉ	Chargé de recherche (hab.) IRCAM
P. JOLY	Directeur de recherche INRIA

THÈSE

REPRÉSENTATION INTÉGRALE APPLIQUÉE À LA SYNTHÈSE SONORE PAR MODÉLISATION PHYSIQUE

MÉTHODES DES ÉLÉMENTS FINIS

Joël BENSOAM

Soutenue le 20 juin 2003

à Julie

Remerciements

Mes remerciements sont tout naturellement adressés à tous ceux qui ont permis de rendre ce travail possible, et donc en premier lieu à René Caussé et Nicolas Joly qui ont acceptés d'encadrer cette thèse. L'accueil et la gentillesse du premier ne sont pas sans rapport avec la concentration et l'investissement que j'ai pu consacré à mon sujet. Je voudrais remercier le second pour sa disponibilité attentionné lors de mes visites au Mans au cours desquelles j'ai pu bénéficier de son expérience et de "son sens physique" liés aux problèmes de mécanique et aux méthodes numériques qui leurs sont appliqués.

Michel Raous m'a fait l'honneur de bien vouloir trouver du temps dans son agenda très chargé pour me faire part de ces remarques fort judicieuses sur les problèmes de contact. Celles-ci ont permis de rendre le document plus précis et plus rigoureux. Je suis reconnaissant à Bertrand Dubus de m'avoir reçu à Lille pour évoquer avec lui les questions que je me posais à mi-parcours, pour l'attention qu'il a porté à ce mémoire et pour avoir envisagé au sein de son laboratoire une application des méthodes proposées. Qu'ils soient tous les deux remerciés d'avoir accepté d'être les rapporteurs de ce travail.

La rencontre avec Michel Bruneau, qui remonte au siècle dernier, lors de mon DEA au Mans en 1989-90, est pour moi de celle dont l'importance est de nature à infléchir les destinées. Il a toujours, discrètement, respectueusement et efficacement, su me communiquer l'envie de comprendre et d'avancer et finalement pu me guider avantageusement dans ma courte vie de scientifique. J'espère avoir été à la hauteur de la confiance qu'il a consenti à m'accorder.

J'ai été très honoré que Patrick Joly et Marc Bonnet aient montré un intérêt pour mes travaux en participant au Jury de cette thèse. Et c'est avec grand plaisir que j'ai rencontré Marc Bonnet avant la soutenance. Je le remercie pour ces conseils avisés et pour son rôle efficient de président de Jury.

J'aimerais profiter de l'occasion pour remercier aussi Hugues Vinet (directeur scientifique de l'Ircam) pour avoir valorisé ce travail au sein l'institution et par la même Nicholas Ellis pour avoir développé informatiquement certains résultats.

Mais, qu'aurais-je pu faire sans les échanges riches et quoditiens entretenus avec Christophe Vergez et Nicolas Misdariis (entre autres à l'origine du sujet de cette thèse) ? A les cotoyer, j'ai appris concrètement mon métier de chercheur. J'espère ne pas avoir abusé de leur patience.

Ce travail a aussi pu aboutir grâce à l'expertise de chercheur que j'ai rencontré au cours de mon travail. Je pense à Philippe Souplet qui a eu la gentillesse de bien vouloir me recevoir pour envisager des réponses aux questions mathématiques liées aux représentatios intégrales utilisant le noyau de Poisson. Ce travail ne serait pas le même sans l'intérêt amical et très précieux qu'a porté généreusement Jonathan Ferreira. Mes pensées vont aussi à tous les acteurs du projet "Sounding object" pour avoir organisé un "workshop" très fructueux et en particulier à Davide Rocchesso qui a, de plus, relu avec précision un de mes articles. Olivier Thomas m'a aussi beaucoup aidé dans la rédaction de cet article, et je me remémore avec délice les discussions scientifiques passionnées que nous avions au congrès de mécanique de Nancy.

Dans ce registre, j'aimerais saluer tous ceux à qui j'ai pu parler de mon sujet dans l'effervecense

de la découverte ou du doute : bien sûr encore une fois Christophe Vergez, mais aussi Thomas Hélie (souvent pris dans sa propre tourmente créatrice), Alexis Baskind, Vincent Rioux, Guillaume Vandernoot, Diemo Schwarz, Olivier Houix, Gerald Kergoulay . . . .

J'ai pu apprécié aussi la grande disponibilité de Sylvie Benoit, Florence Quilliard, Alain Terrier, Gérard Bertrand, Patrice Tisserand, Emmanuel Rio et j'aimerais leur montrer ma reconnaisance.

Table des matières

Introduction

Introduction

La synthèse par modèle de signaux se concentre sur la représentation temporelle de la vibration du son : le signal sonore. Helmholtz, dès 1860, avait vu dans la vibration périodique d'un son la possibilité de le décomposer en signaux élémentaires sinusoïdaux en utilisant la série de Fourier. Mais il a fallu attendre le milieu du XXe siècle pour que les techniques électroniques permettent de synthétiser ces signaux.

Du concept de *signal* on est ainsi passé naturellement au concept de *synthèse* : le signal n'est plus essentiellement un signal capté, mais devient un signal synthétique. Cette synthèse par modèle de signaux se décline en différentes formes. La synthèse additive, à l'origine des premiers synthétiseurs analogiques, construit un son par superposition de sinusoïdes. Bientôt, les progrès du traitement du signal, utilisé aussi dans d'autres domaines, principalement les télécommunications, offrent de nouvelles perspectives : synthèse soustractive (*i.e.* l'atténuation ou amplification par filtrage de certaines composantes fréquentielles d'une source riche en harmoniques ou bruitée), synthèse par formes d'onde, granulaire, formantique, par convolution, par modulation de fréquence (ou synthèse FM). Ces techniques ont ainsi produit des résultats concrets en matière de synthèse mais aussi en termes de reconnaissance vocale, de transmission et compression de données... Elles sont même à l'origine de nouveaux sons virtuels sans correspondance directe avec un processus traditionnel de production sonore[1].

Aussi sophistiquées que soient ces techniques, qu'elles soient analogiques ou numériques, toutes découlent du concept de *signal* et ne visent qu'à reproduire les propriétés perceptives des sons, sans se soucier de la façon dont ils sont créés et sans aborder les phénomènes de propagation. Or, les objets sonores ne peuvent pas se résumer aux seules variations des propriétés du signal même s'ils produisent *in fine* un signal. De fait, si les grandes lignes du son musical (hauteur, variation de timbre et d'intensité) sont bien reproduites, l'oreille la plus commune fait tout de suite la part entre un son naturel et un son artificiel. Cette faiblesse apparaît comme inhérente au cadre d'analyse retenu. Car, si la synthèse sonore produit un signal, ce n'est pas son objet. L'objet de la synthèse c'est le *son*.

La synthèse par modélisation physique offre une démarche alternative en s'interrogeant sur les causes plutôt que sur les effets. Quels sont les phénomènes physiques de la production du son ? Comment se propage-t-il ? Voilà les questions auxquelles le scientifique doit répondre.

Au préalable, c'est la question du choix du système de production sonore à étudier qui se pose. Si on s'intéresse au son musical c'est naturellement l'instrument qui redevient au centre des préoccupations. La formalisation des problèmes dépasse alors le cadre de l'analyse d'un signal. Prenons l'exemple de l'interaction d'un archet et d'une corde où se jouent des phénomènes physiques de frottement, de contact, de glissement, d'échauffement, tous encore mal compris des physiciens et des mathématiciens. Ce n'est qu'en simplifiant et en décomposant le système que l'on peut espérer en comprendre le fonctionnement. Plutôt que de développer un modèle complet par instrument (ou

[1] Les sons synthétiques et artificiels prennent une place de plus en plus importante au sein de l'orchestre traditionnel. Même les institutions les plus conservatrices font une part à ces nouvelles techniques. Le CNSM n'accueille-t-il pas une classe d'électro-acoustique ?

par famille d'instruments), il faut chercher à rendre compte de leur diversité de manière modulaire. Ainsi, contrairement à l'approche précédente qui présentait les phénomènes dans leur globalité, ce seront ici des sous-structures qui représenteront une, et une seule, propriété physique précise. Si bien qu'un objet instrumental complexe se décrit par l'assemblage de plusieurs sous-structures. Les règles d'assemblage doivent, elles aussi, faire l'objet d'une attention toute particulière. Puisqu'il est principalement question ici de propagation d'ondes, l'interaction des éléments de l'ensemble joue un rôle primordial dans le comportement du système global.

Depuis maintenant deux décennies plusieurs approches de la synthèse par modélisation physique se sont développées dans cette direction. Tous les formalismes décomposent un système physique complexe en structures élémentaires en interaction dont les propriétés mécano-acoustiques sont étudiées. Elles diffèrent seulement dans la manière de traiter individuellement le comportement dynamique de chaque élément : propagation guidée pour les *guides d'ondes* de Julius Orion Smith (à Standford), relation fondamentale de la dynamique pour les masses de *Cordis-Anima* (développé à l'Acroe) ou mode de vibration dans *Modalys* (développé par l'équipe d'acoustique instrumentale de l'Ircam dans les années 90).

La définition même de la structure élémentaire dépend du formalisme choisi pour décrire son comportement dynamique. Dispose-t-on de la seule relation fondamentale de la dynamique ? Les structures sont des masses. Connaît-on la propagation dans un tube ? Les structures sont des guides d'ondes. Enfin choisit-on le formalisme modal ? Les structures sont celles dont les expressions analytiques des modes propres de vibration sont disponibles (c'est-à-dire un petit nombre d'objets vibrants, pour la plupart à une ou deux dimensions, dont les géométries et les conditions aux limites sont suffisamment simples (plaque rectangulaire à bords appuyés, membrane circulaire fixée sur sa circonférence, corde, tube ouvert-fermé, etc...). Le choix de se limiter aux seules structures simples dont les modes propres sont connus analytiquement, comme c'est le cas dans Modalys, est un choix pratique. L'idée, qui est à l'origine de cette thèse, est d'exploiter les connaissances actuelles en matière de calcul modal numérique pour envisager des structures de géométrie plus variée (voire de formes quelconques).

Cependant, cette extension induit de nouvelles contraintes. En effet, les objets tridimensionnels interagissent nécessairement via leur surface. Les conditions aux limites dépendent alors du temps et traduisent l'influence du milieu extérieur sur le système considéré. Pour les objets simples traités par *Modalys*, cette difficulté n'apparaît pas car les conditions aux limites sont immuables (corde fixée à ces extrémités, plaque supportée,...) et n'interviennent pas explicitement dans le calcul des interactions entre objets. Le formalisme doit donc être amélioré en définissant précisément un élément de base.

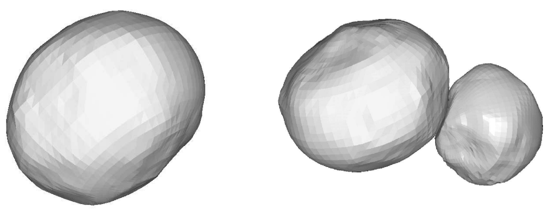


FIG. 1. **Structure élémentaire seule et en interaction** La première partie de la thèse se consacre à l'étude d'un solide élastique de forme quelconque, isotrope ou anisotrope, soumis à des conditions aux limites arbitraires et évoluant selon les lois de propagation linéaire. Les résultats de cette étude servent, dans la seconde partie de thèse, à résoudre les problèmes d'interactions entre ces éléments de base.

Pour cela, nous avons choisi une structure élémentaire indépendamment du formalisme qui per-

met de décrire son comportement. Il s'agit d'un solide élastique de forme quelconque, isotrope ou anisotrope, soumis à des conditions aux limites arbitraires et évoluant selon les lois de propagation linéaire. Cela fournit un cadre d'analyse volontairement limité et simplifié [2] de manière à pouvoir traiter les problèmes de la façon la plus exhaustive possible, tout en gardant un niveau de généralité raisonnable permettant de représenter nombre de situations concrètes. Le choix des solides (plutôt que les gaz ou les fluides) est un parti pris mais comporte néanmoins dans son traitement mathématique certaines caractéristiques communes à d'autres milieux.

L'étude de cet élément de base fait l'objet de la première partie de cette thèse et est abordée en utilisant les méthodes intégrales. D'autres méthodes existent (méthodes directes de calcul de la solution d'un problème aux équations différentielles par un algorithme itératif), mais l'avantage des représentations intégrales est par définition de prendre en compte les phénomènes sur la surface des objets. Or, c'est précisemment par l'intermédiaire de leur surface que les objets tridimensionnels interagissent entre eux.

Ces méthodes proposent de traiter un problème ellyptique par la détermination d'une distribution de sources placées sur le bord des structures. La connaissance de cette distributions permet de résoudre le problème y compris dans le volume. Généralement les sources utilisées correspondent à des solutions élémentaires du milieu infini. Cependant cette variante nécessite de résoudre des équations intégrales pour chaque situation et peut s'avérer être très coûteuses en terme de temps de calcul. Le choix de la fonction de Green propre au système étudié (ou plus exactement du noyau de Poisson comme nous le verrons dans le détail de cette thèse), où figurent explicitement les conditions aux limites, s'est avéré être mieux adapté pour une utilisation musicale. Les calculs sont répartis en deux phases : l'une permettant d'obtenir la signature acousto-mécanique du système étudié et l'autre donnant la réponse de ce système soumis à une excitation quelconque.

Cependant, ce type de choix de solution élémentaire n'est pas fréquent et il a fallut adapter, à cette situation particulière, la théorie des équations intégrales en aboutissant à une formulation valide sur la surface des objets. En effet, les singularités qui peuvent apparaître lorsque le point source coïncide avec le point d'observation, nécéssitent un traitement rigoureux. C'est la principale difficulté qui a été levée dans ce travail de thèse : les représentations intégrales obtenues diffèrent des solutions habituelles.

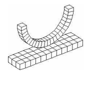
Dans une seconde partie, les propriétés physiques qui auront été établies serviront à résoudre les problèmes d'interactions entre les éléments de base : principalement les problèmes de contact et d'assemblage. Cette partie constitue une alternative aux modèles phénoménologiques généralement utilisés en synthèse sonore pour traiter les interactions. Ces modèles nécessitent l'utilisation de paramètres non linéaires qui sont difficiles à estimer *a priori*. A l'inverse, dans ce travail, le parti pris est de partir des principes premiers de la physique (notamment des lois de conservation de la mécanique des milieux continus) pour aboutir *in fine* au comportement des structures en interaction, en repoussant au plus loin les limites de l'abitraire.

Ce travail ne serait pas abouti sans une application concrète. La dernière annexe présente le manuel d'utilisation du logiciel Modalys dans lequel une partie des résultats ont été implémentés.

[2] la propagation non linéaire n'est pas prise en compte

Première partie

Propagation des ondes dans un solide



Pour appliquée que soit la problématique de cette thèse, elle s'inscrit dans un cadre théorique assez vaste dont la synthèse sonore n'est pas le domaine d'application privilégié. Ce cadre est celui de la mécanique des milieux continus, utilisée ici pour traiter le comportement dynamique des solides. Le premier chapitre expose brièvement cette théorie de manière à obtenir les équations du mouvement qui seront résolues selon les cas dans la suite du document.

L'influence des conditions aux limites sur les propriétés de résonance d'un système n'est plus à démontrer. C'est pourquoi, le deuxième chapitre accorde une large place à la formalisation mathématique des problèmes aux limites. Dans ce contexte, le formalisme intégral est particulièrement bien adapté dans la mesure où le comportement dynamique du système est complètement déterminé par les champs de contrainte et de déplacement en vigueur sur la surface des objets. Le troisième chapitre introduit une solution élémentaire, le noyau de Poisson, qui permet d'obtenir la solution du problème aux limites sous la forme d'une solution intégrale où figurent explicitement les conditions aux limites. Viennent ensuite quelques pistes qui permettent d'envisager le calcul de ce noyau élémentaire dont la méthode modale. Le quatrième chapitre, consacré aux méthodes numériques, expose la solution explicite du problème aux limites à l'aide de la version numérique du noyau de Poisson. Enfin la première partie se termine par l'étude d'un système mécanique en vibration au voisinage d'un état d'équilibre où règne un champ de contrainte non nul. Le spectre de vibration est alors modifié par la présence de cette précontrainte (corde, table d'harmonie, archet de violon,. . .).

I

Mécanique des milieux continus

Cette thèse fonde la modélisation des instruments de musique sur les lois de la mécanique. Ce chapitre propose une relecture synthètique[1] des lois de la mécanique de manière à faire ressortir les principes physiques fondamentaux qui les sous-tendent et qui seront la référence première de tous les développements des chapitres suivants. Il n'est donc pas question ici de réécrire un traité de mécanique des milieux continus mais d'insister sur la relation qui existe entre la pensée axiomatique de la mécanique et la mathématisation qui en découle.

Les équations du mouvement d'un corps en évolution thermomécanique peuvent être établies à partir de lois de conservation. En mécanique classique, cinq lois de conservation sont postulées indépendamment de la géométrie et de la constitution des matériaux étudiés. Il s'agit de la conservation de la masse, de la quantité de mouvement, des moments, de l'énergie et enfin de l'entropie[2]. Par conservation, il est sous entendu conservation dans le temps. Une quantité Q se conserve si elle est invariante au cours du temps. C'est généralement vrai pour un système isolé. Lorsqu'un système est soumis à un environnement extérieur, il n'est plus isolé et la loi de conservation exprime la variation temporelle $\frac{dQ}{dt}$ de la quantité Q pour traduire les échanges du corps considéré avec son environnement.

En mécanique des milieux continus, chaque quantité qui se conserve (ou qui varie selon une loi

[1] Cette relecture s'appuie plus particulièrement sur les ouvrages généraux de mécanique des milieux continus [1, 2, 3, 4].

[2] En tout rigueur, il faudrait parler des deux premiers principes de la thermodynamique, plutôt que de conservation de l'énergie et de l'entropie.

donnée) se présente comme une somme continue d'une densité volumique[3] : c'est-à-dire une intégrale portant sur le domaine Ω_t occupé par le corps considéré à l'instant t. Ce domaine est celui qui suit le corps dans son mouvement propre. Les équations du mouvement sont alors rendues explicites en évaluant la dérivée particulaire (i.e. temporelle) de ces intégrales et la principale difficulté porte sur le fait que le domaine d'intégration, Ω_t, dépend du temps.

Dans ce chapitre, les lois de conservation sont présentées tour à tour (section 1) et les équations du mouvement en sont déduites en appliquant deux théorèmes fondamentaux (section 2). Le premier permet de calculer la dérivée particulaire d'une intégrale portant sur un domaine qui dépend du temps et le second permet de prendre en compte, dans le volume du corps, l'infuence de l'environnement qui agit sur sa frontière. La dernière partie traite de la loi de comportement des milieux visco-élastique.

1 LOIS DE CONSERVATION

Axiome 1.1 ***Conservation de la masse****. La masse totale d'un corps est invariante au cours du temps.*

Selon cette loi, la masse initiale totale du corps (c'est-à-dire celle évaluée dans sa configuration non-déformée κ_0 à $t = 0$) est la même que celle évaluée à n'importe quel autre instant t (c'est-à-dire dans sa configuration actuelle κ_t). La masse totale d'un système matériel occupant un volume Ω_0 (resp. Ω_t), dans sa configuration κ_0 (resp. κ_t), s'obtient comme l'intégrale d'une densité volumique finie, appelée masse volumique et notée ρ_0 (resp. ρ)

$$M = \int_{\Omega_0} \rho_0 \, dv, \quad 0 \leq \rho_0 < +\infty, \quad (\text{ resp. } M = \int_{\Omega_t} \rho \, dv, \quad 0 \leq \rho < +\infty)$$

La loi de conservation de la masse stipule

$$M = \int_{\Omega_0} \rho_0 \, dv = \int_{\Omega_t} \rho \, dv$$

Or, la première intégrale est indépendante du temps. La loi de conservation de la masse peut donc s'écrire

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho \, dv = \frac{d}{dt} \int_{\Omega_0} \rho_0 \, dv = 0. \tag{I.1}$$

Axiome 1.2 ***Conservation de la quantité de mouvement****. La variation de quantité de mouvement d'un domaine fluide ou solide Ω_t est égale à la résultante $\mathcal{F}$ des forces agissant sur le domaine.*

Mathémathiquement,

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho \dot{\mathbf{u}} \, dv = \mathcal{F} \tag{I.2}$$

où le terme de gauche est la variation de quantité de mouvement du domaine Ω_t et $\dot{\mathbf{u}}$ le champ des vitesses des particules de Ω_t. La résultante des forces se compose de forces de volume (la gravité par exemple) et de forces de surface qui traduisent des actions locales de contact. Cette distinction permet d'écrire la loi de conservation de la quantité de mouvement sous la forme

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho \dot{\mathbf{u}} \, dv = \int_{\Omega_t} \rho \mathbf{f} \, dv + \int_{\partial\Omega_t} \mathbf{t_n} \, ds \tag{I.3}$$

où $\mathbf{t_n}$ est une force par unité de surface agissant sur la frontière $\partial\Omega_t$ du corps. Cette force dépend, comme son indice le laisse supposer, de l'orientation du vecteur unitaire $\mathbf{n}$ normal à $\partial\Omega_t$. Par convention ce vecteur pointe vers l'extérieur de Ω_t. La densité massique de force $\mathbf{f}$ rend compte des effets à distance.

[3] masse volumique ρ pour la masse, densité massique ou spécifique d'énergie interne ϵ pour l'énergie interne totale…

Axiome 1.3 ***Conservation des moments***. *La variation des moments d'un domaine fluide ou solide Ω_t est égale à la résultante des moments des forces agissant sur le domaine.*

Mathématiquement,

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t} \rho \mathbf{OM} \wedge \dot{\mathbf{u}}\, dv = \int_{\Omega_t} \rho \mathbf{OM} \wedge \mathbf{f}\, dv + \int_{\partial\Omega_t} \mathbf{OM} \wedge \mathbf{t_n}\, ds \tag{I.4}$$

où le terme de gauche est la variation des moments du domaine Ω_t par rapport à une origine arbitraire O. Le terme de droite est la somme des moments des efforts de surface et des moments des efforts de volume par rapport à l'origine O.

Axiome 1.4 ***Conservation de l'énergie ou premier principe de la thermodynamique***. *La variation de l'énergie cinétique T et de l'énergie interne W d'un domaine fluide ou solide Ω_t est égale à la somme de la puissance $\mathcal{P}$ des forces agissant sur le système et du taux de chaleur $\mathcal{Q}$ reçu par le système*[4].

Mathématiquement,

$$\frac{d}{dt}[T + W] = \mathcal{P} + \mathcal{Q} \tag{I.5}$$

En mécanique des milieux continus, l'existence d'une densité spécifique (ou massique) d'énergie interne ϵ est postulée. Elle permet d'écrire l'énergie interne sous la forme

$$W = \int_{\Omega_t} \rho\epsilon\, dv$$

L'énergie cinétique totale a pour forme

$$T = \frac{1}{2}\int_{\Omega_t} \rho \dot{\mathbf{u}}.\dot{\mathbf{u}}\, dv$$

La puissance des forces de surface $\mathbf{t_n}$ et de volume $\mathbf{f}$ est donnée par

$$\mathcal{P} = \int_{\Omega_t} \rho \mathbf{f}.\dot{\mathbf{u}}\, dv + \int_{\partial\Omega_t} \mathbf{t_n}.\dot{\mathbf{u}}\, ds$$

Le taux de chaleur $\mathcal{Q}$ reçu par le système se compose

1. d'un terme de volume dont la contribution est l'intégrale de volume d'une densité h, qui correspond aux taux de chaleur fourni, par unité de masse, aux éléments du système par l'extérieur,
2. d'un terme de conduction à la frontière $\partial\Omega_t$ du domaine Ω_t, dont la contribution est l'opposée du flux d'un vecteur courant de chaleur $\mathbf{q}$ sortant de la surface $\partial\Omega_t$

Ce qui permet d'écrire

$$\mathcal{Q} = \int_{\Omega_t} \rho h\, dv - \int_{\partial\Omega_t} \mathbf{q}.\mathbf{n}\, ds$$

où $\mathbf{n}$ est le vecteur unitaire normal à la surface $\partial\Omega_t$ pointant vers l'extérieur du domaine Ω_t. Dans ces conditions, le premier principe de la thermodynamique est

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t} \left(\rho\epsilon + \frac{1}{2}\rho\dot{\mathbf{u}}.\dot{\mathbf{u}}\right) dv = \int_{\Omega_t} \left(\rho\mathbf{f}.\dot{\mathbf{u}} + \rho h\right) dv + \int_{\partial\Omega_t} \left(\mathbf{t_n}.\dot{\mathbf{u}} - \mathbf{q}.\mathbf{n}\right) ds \tag{I.6}$$

[4] D'autres formes d'énergie d'origine électromagnétique, chimique... peuvent être présentes mais seuls les problèmes thermomécaniques sont envisagés ici

Axiome 1.5 ***Second principe de la thermodynamique****. La variation de l'entropie $\mathcal{H}$ d'un système est toujours plus grande que la somme des sources d'entropie volumique et du flux entrant d'entropie qui traverse la surface $\partial\Omega_t$.*

Mathématiquement,

$$\frac{d}{dt}\mathcal{H} \geq \int_{\Omega_t} \rho a \, dv + \int_{\partial\Omega_t} \mathbf{b}.\mathbf{n} \, ds \tag{I.7}$$

où a est une densité spécifique (ou massique) de source d'entropie apportée par l'extérieur. En mécanique des milieux continus, l'entropie $\mathcal{H}$ est décrite par une densité d'entropie spécifique s telle que

$$\mathcal{H} = \int_{\Omega_t} \rho s \, dv.$$

Il est aussi possible d'introduire la température absolue θ toujours positive ($\theta > 0$ et $\inf\theta = 0$) de manière à relier le flux d'entropie $\mathbf{b}$ au vecteur courant de chaleur $\mathbf{q}$ par la formule $\mathbf{b} = -\frac{\mathbf{q}}{\theta}$. Le paramètre h permet de décrire les sources d'entropie sous la forme $a = \frac{h}{\theta}$. Le second principe de la thermodynamique devient alors

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t} \rho s \, dv \geq \int_{\Omega_t} \rho \frac{h}{\theta} \, dv - \int_{\partial\Omega_t} \frac{1}{\theta}\mathbf{q}.\mathbf{n} \, ds, \tag{I.8}$$

2 EQUATIONS DU MOUVEMENT

2.1 Théorèmes fondamentaux

Considérant le domaine Ω_t traversé par une surface de discontinuité Σ_t de vitesse $\mathbf{w}$ (Fig. I.1), les deux théorèmes suivants sont fondamentaux pour déterminer les équations d'équilibre dynamique. Dans la suite, l'intégrale de volume sur $\Omega_t \backslash \Sigma_t$ représente l'intégrale sur Ω_t en excluant les points situés sur la surface de discontinuité Σ_t. De même, l'intégrale qui porte sur la surface $\partial\Omega_t \backslash \Sigma_t$ exclut la ligne d'intersection de Σ_t avec $\partial\Omega_t$ (Fig. I.1).

$$\Omega_t \backslash \Sigma_t \equiv \Omega_t^1 \cup \Omega_t^2, \quad \partial\Omega_t \backslash \Sigma_t \equiv \partial\Omega_t^1 \cup \partial\Omega_t^2$$

La dérivée particulaire d'une intégrale de volume portant sur le domaine $\Omega_t \backslash \Sigma_t$ de tout champ $\mathcal{A}$ (scalaire, vectoriel, tensoriel) discontinu sur Σ_t est donnée par

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t \backslash \Sigma_t} \mathcal{A} \, dv = \int_{\Omega_t \backslash \Sigma_t} \left[\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t} + (\mathcal{A}\dot{u}_k)_{,k} \right] dv + \int_{\Sigma_t} [\![\mathcal{A}(\dot{u}_k - w_k)]\!] \, n_k \, ds \tag{I.9}$$

(la notation $(\mathcal{A}\dot{u}_k)_{,k}$ désigne la dérivée partielle de $(\mathcal{A}\dot{u}_k)$ par rapport à la coordonnées x_k)

Le théorème généralisé de la divergence stipule que pour tout champ $\mathcal{A}$ (scalaire, vectoriel, tensoriel) discontinu sur Σ_t, on a

$$\int_{\partial\Omega_t \backslash \Sigma_t} \mathcal{A} n_k \, ds = \int_{\Omega_t \backslash \Sigma_t} \mathcal{A}_{,k} \, dv + \int_{\Sigma_t} [\![\mathcal{A}]\!] \, n_k \, ds \tag{I.10}$$

Les double crochets indiquent le saut de la fonction qu'ils encadrent : c'est-à-dire la différence des valeurs de la fonction de part et d'autre de la surface de discontinuité orientée selon le choix de la normale.

$$[\![f]\!] \equiv f^+ - f^- \tag{I.11}$$

Le produit $[\![f]\!] \, n_k$ est indépendant de toute orientation de la normale $\mathbf{n}$.

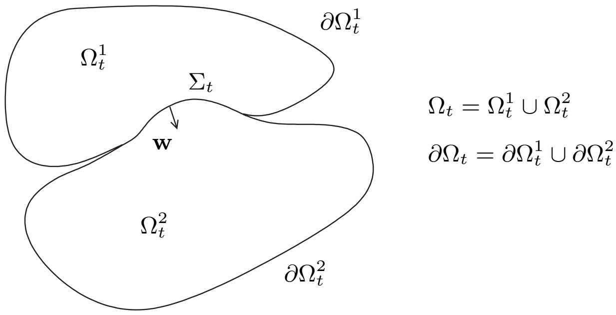


FIG. I.1. **Surface de discontinuité** Un domaine fluide ou solide Ω_t peut être traversé par une surface de discontinuité Σ_t. Deux solides en contact représentés par les domaines Ω_t^1 et Ω_t^2 (tels que $\Omega_t = \Omega_t^1 \cup \Omega_t^2$) peuvent avoir une masse volumique différente. À la traversée de la surface Σ_t la masse volumique est alors discontinue.

2.2 Équations du mouvement non linéaires

En appliquant, maintenant, les deux théorèmes (I.9) et (I.10), aux lois de conservations décrites dans la précédente section, c'est-à-dire en prenant respectivement

$$\mathcal{A} \equiv \rho, \quad \mathcal{A} \equiv \rho\dot{\mathbf{u}}, \quad \mathcal{A} \equiv \rho\mathbf{OM} \wedge \dot{\mathbf{u}}, \quad \mathcal{A} \equiv \rho\epsilon + \frac{1}{2}\rho\dot{\mathbf{u}}.\dot{\mathbf{u}} \quad \text{et finalement} \quad \mathcal{A} \equiv \rho s,$$

dans les formules (I.1), (I.3), (I.4), (I.6) et (I.8), il est aisé d'obtenir les équations du mouvement suivantes

Conservation de la masse

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + (\rho\dot{u}_k)_{,k} = 0 \qquad \text{dans } \Omega_t \backslash \Sigma_t \qquad \text{(I.12)}$$

$$[\![\rho(\dot{u}_k - w_k)]\!]\, n_k = 0 \qquad \text{sur } \Sigma_t \qquad \text{(I.13)}$$

Conservation de la quantité de mouvement

$$\rho f_k + \sigma_{kl,l} = \rho\ddot{u}_k \qquad \text{dans } \Omega_t \backslash \Sigma_t \qquad \text{(I.14)}$$

$$[\![\dot{u}_k]\!]\, \rho(\dot{u}_l - w_l)n_l = [\![\sigma_{kl}]\!]\, n_l \qquad \text{sur } \Sigma_t \qquad \text{(I.15)}$$

Conservation des moments

$$\sigma_{kl} = \sigma_{lk} \qquad \text{dans } \Omega_t \backslash \Sigma_t \qquad \text{(I.16)}$$

Premier principe de la thermodynamique (conservation de l'énergie)

$$\rho\dot{\epsilon} = \sigma_{kl}.\dot{u}_{k,l} + \rho h - q_{l,l} \qquad \text{dans } \Omega_t \backslash \Sigma_t \qquad \text{(I.17)}$$

$$\left[\!\!\left[(\frac{1}{2}\dot{u}_k.\dot{u}_k + \epsilon)\right]\!\!\right] \rho(\dot{u}_l - w_l)n_l = [\![\sigma_{kl}.\dot{u}_k - q_l]\!]\, n_l \qquad \text{sur } \Sigma_t \qquad \text{(I.18)}$$

Second principe de la thermodynamique (entropie)

$$\rho\dot{s} - \rho\frac{h}{\theta} + (\frac{q_l}{\theta})_{,l} \geq 0 \qquad \text{dans } \Omega_t \backslash \Sigma_t \qquad \text{(I.19)}$$

$$\left([\![s]\!]\, \rho(\dot{u}_l - w_l) + \left[\!\!\left[\frac{q_l}{\theta}\right]\!\!\right]\right) n_l \geq 0 \qquad \text{sur } \Sigma_t \qquad \text{(I.20)}$$

où le tenseur des contraintes de Cauchy a été introduit en posant

$$\sigma_{kl}n_l = t_{\mathbf{n}k} \quad \text{sur} \quad \partial\Omega_t \qquad \text{(I.21)}$$

Remarque Il est utile, pour effectuer ces calculs, d'exprimer la dérivée particulaire d'une quantité X définie par sa densité spécifique χ (densité par unité de masse) sous la forme

$$\dot{X} = \frac{d}{dt}\int_{\Omega_t} \rho\chi\, dv = \int_{\Omega_t\backslash\Sigma_t} \rho\dot{\chi}\, dv + \int_{\Sigma_t} [\![\chi]\!]\, \rho(\dot{u}_l - w_l)n_l dS \tag{I.22}$$

Cette relation est obtenue en prenant en compte la conservation de la masse (I.12) et (I.13) dans la formule de dérivation (I.9).

Energie libre

Un autre forme d'inégalité fondamentale est obtenue en éliminant h de (I.19) et (I.17). En tenant compte du fait que $\theta > 0$, il vient

$$\rho(\theta\dot{s} - \dot{\epsilon}) + \sigma_{kl}.\dot{u}_{k,l} - \frac{q_l}{\theta}\theta_{,l} \geq 0 \tag{I.23}$$

Il est parfois utile d'exprimer cette inégalité en fonction de l'énergie libre spécifique

$$\psi = \epsilon - \theta s \tag{I.24}$$

en éliminant l'énergie interne ϵ. L'inégalité obtenue est appelée inégalité de Clausius-Duhem

$$\underbrace{-\rho(\dot{\psi} + s\dot{\theta}) + \sigma_{kl}.\dot{u}_{k,l}}_{\Phi_{int}} \underbrace{-\frac{q_l}{\theta}\theta_{,l}}_{\Phi_{th}} \geq 0 \tag{I.25}$$

La quantité Φ_{int} représente la dissipation intrinsèque volumique et Φ_{th} la dissipation thermique volumique. Il faut insister ici sur le terme *volumique* car ces expressions sont valables dans le volume $\Omega_t\backslash\Sigma_t$, c'est-à-dire en dehors de la surface de discontinuité Σ_t des champs considérés. Pour les problèmes de contact où cette surface existe, il faut préciser la notion de dissipation surfacique (voir Chap. VII § 2.2).

Les équations d'équilibre obtenues dans cette section sont appliquables, en toute généralité, à des systèmes physiques de géométries et de constitution quelconques. Mais ces équations sont insuffisantes pour permettre une prévision des mouvements et des efforts intérieurs, à partir des conditions initiales et des données spécifiant les actions extérieurs exercées sur le système étudié. Le bon sens permet de prévoir que des relations supplémentaires doivent être établies de manière à traduire la nature physique des milieux envisagés. Le dénombrement des inconnues introduites et des relations déja obtenues le confirme.

3 LOI DE COMPORTEMENT DES MILIEUX VISCO-ÉLASTIQUES

Les relations supplémentaires, généralement appelées lois de comportement, dépendent de la nature physique du milieu considéré (solide, fluide, gaz, matière molle...). Pour décrire l'état de chaque milieu continu, l'existence de champs matériels de grandeurs physiques indépendantes est postulée. Ainsi, pour décrire un gaz, la température θ et la masse volumique ρ peuvent être choisies. Décrire l'état d'un milieu continu c'est décrire l'état de chacune de ses particules. Les valeurs de ces champs de grandeurs physiques pour une particule P sont appelées variables d'état indépendantes. Ainsi, pour une particule P d'un gaz, ces variables sont $\theta(P, t)$ et $\rho(P, t)$ et sont indépendantes[5] dans le sens où l'on peut donner à chacune d'elles une valeur arbitraire sans modifier les autres.

[5]Dans le cas d'un fluide il existe une relation entre la température et la masse volumique sous la forme $\rho = f(\theta)$. Dans ce cas, les variables θ et ρ ne sont plus indépendantes.

A l'aide de ces variables d'état indépendantes, il est possible de construire une loi de comportement d'un milieu continu particulier (solide, fluide, gaz. . .) en tirant toutes les conséquences du second principe de la thermodynamique à travers l'inéquation (I.23) (ou d'une manière équivalente (I.25)). Les lois de comportement d'un solide visco-élastique sont détaillées ci-dessous.

3.1 Hypothèses

Les milieux visco-élastiques forment une classe de milieu continu destinée à modéliser des solides déformables. Dans un milieu élastique, on postule qu'il existe pour chaque particule, un état privilégié appelé état initial à partir duquel les déformations sont mesurées. Dans l'état initial la température du corps est uniforme et vaut θ_0. Si le corps subit un chargement de la part de son milieu extérieur, ou reçoit de la chaleur, sa température change et il se déforme. Lorsque les influences extérieures cessent, il retourne à son état initial (contrairement aux évolutions plastiques). Dans la plupart des cas, cet état initial est l'état naturel du milieu élastique : l'état pour lequel la particule n'est soumise à aucune sollicitation mécanique. Cependant pour rester général, et pour pouvoir traiter les problèmes avec précontrainte, l'état initial est caractérisé par un tenseur de contrainte de Cauchy, σ^0, non nul.

Il reste maintenant à choisir les variables d'état d'un milieu visco-élastique. Selon J. Garrigues [5], les connaissances en physique microscopique guident le choix des variables macroscopiques qui caractérisent l'état de la matière. En physique microscopique, l'état de la matière est essentiellement caractérisé par :

1. l'agitation moléculaire mesurée par une variable macroscopique appelée température : θ. C'est une fonction de la proportion d'atomes excités et d'atomes à l'état fondamental. Un atome excité est considéré comme étant un atome qui vibre beaucoup autour de sa position moyenne. L'amplitude de ses oscillations augmente avec la température. C'est ce qui provoque la dilatation, c'est-à-dire l'augmentation du volume d'un corps. Cet état de vibration microscopique peut être caractérisé plus finement en distinguant deux états, à la même température, soumis à des gradients de température différents. Auquel cas le gradient de la température $\theta_{,k}$ sera considéré.
2. la position relative des molécules qui détermine l'énergie des forces intermoléculaires. Cette position relative peut être caractérisée plus ou moins finement :
   – par la masse volumique ρ, c'est-à-dire par le nombre de molécules par unité de volume dans la particule macroscopique en admettant une répartition statistiquement isotrope à tout instant. C'est ce qui est fait généralement pour les gaz.
   – par un tenseur de déformation : la distribution spatiale des molécules est différente avant et après déformation. Le tenseur de déformation permet de différencier ces états. C'est ce qui est fait généralement pour les solides.

Pour plus de simplicité dans la suite de l'exposé, les gradients de la température ne seront pas considérés comme variables d'état. Les variables d'état indépendantes pour les milieux visco-élastiques sont alors la température actuelle θ et le tenseur de déformation Lagrangien[6] $\mathbf{E}$ mesurant la déformation de l'état actuel par rapport à l'état initial. J. Salençon [3] définit le matériau thermoélastique [7] par l'axiome suivant

Axiome 3.1 ***Un Matériau thermoélastique*** *est un matériau pour lequel les fonctions thermodynamiques ϵ, s (énergie interne et entropie massiques) et le tenseur de Piola-Kirchhoff Σ sont des fonctions univoques des seules variables θ et $\mathbf{E}$.*

[6] Bien que le choix d'un tenseur de déformation objectif soit plus adéquat dans la mesure où son utilisation réduit la dimension de l'espace des états.

[7] Cette définition convient aussi pour le matériau visco-élastique

3.2 Conséquences du second principe de la thermodynamique

Compte tenu de la définition du matériau thermoélastique, il est maintenant possible de tirer parti du second principe de la thermodynamique afin d'obtenir une loi de comportement qui relie contrainte et déformation. Cette loi de comportement est établie dans les deux configurations eulérienne et lagrangienne et possède un caractère non linéaire. A terme, cette loi de comportement est linéarisée au voisinage de l'état d'équilibre.

Représentation eulérienne

Compte tenu de la symétrie du tenseur des contraintes (I.16), le second principe (I.23) s'écrit encore

$$\rho(\theta\dot{s} - \dot{\epsilon}) + \sigma_{kl}.d_{kl} - \frac{q_k}{\theta}\theta_{,k} \geq 0 \tag{I.26}$$

où $\mathbf{d}$ est le tenseur des vitesses de déformation dont l'expression en fonction des déplacements $\mathbf{u}$ est

$$d_{kl} = \frac{1}{2}(\dot{u}_{k,l} + \dot{u}_{l,k}). \tag{I.27}$$

Puisque θ et $\mathbf{E}$ sont les seules variables d'état, l'énergie interne spécifique ϵ et l'entropie spécifique s sont des fonctions d'état dans le sens où elles peuvent s'exprimer en fonction des seules variables θ et $\mathbf{E}$. Leurs dérivées temporelles sont donc

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon} &= \frac{d}{dt}\epsilon(\theta, \mathbf{E}) = \frac{\partial \epsilon}{\partial \theta}\dot{\theta} + \frac{\partial \epsilon}{\partial \mathbf{E}}\dot{\mathbf{E}} \\ \dot{s} &= \frac{d}{dt}s(\theta, \mathbf{E}) = \frac{\partial s}{\partial \theta}\dot{\theta} + \frac{\partial s}{\partial \mathbf{E}}\dot{\mathbf{E}} \end{aligned}$$

Si bien que le second principe (I.26) devient

$$\rho(\theta\frac{\partial s}{\partial \theta} - \frac{\partial \epsilon}{\partial \theta})\dot{\theta} + \rho(\theta\frac{\partial s}{\partial \mathbf{E}} - \frac{\partial \epsilon}{\partial \mathbf{E}})\dot{\mathbf{E}} + \sigma_{kl}.d_{kl} - \frac{q_k}{\theta}\theta_{,k} \geq 0 \tag{I.28}$$

D'une manière équivalente, il est possible de remplacer, dans l'inégalité de Clausius-Duhem (I.25), la dérivée particulaire de l'énergie libre spécifique ψ par son expression en fonction des seules variables θ et $\mathbf{E}$

$$\dot{\psi} = \frac{\partial \psi}{\partial \theta}\dot{\theta} + \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{E}}\dot{\mathbf{E}} \tag{I.29}$$

En remarquant, de plus, que la dérivée particulaire $\dot{\mathbf{E}}$ du tenseur de déformation est liée au tenseur des vitesses de déformation par

$$\dot{E}_{KL} = x_{k,K}d_{kl}x_{l,L} \tag{I.30}$$

un nouvelle inégalité fondamentale est obtenue

$$\underbrace{-\rho(\frac{\partial \psi}{\partial \theta} + s)\dot{\theta} + (\sigma_{kl} - \rho x_{k,K}\,(\partial\psi/\partial E_{KL})\,x_{l,L})d_{kl}}_{\Phi_{int}} \underbrace{- \frac{q_k}{\theta}\theta_{,k}}_{\Phi_{th}} \geq 0 \tag{I.31}$$

Or, puisque les quantités $\dot{\theta}$, d_{kl} et $\theta_{,k}$ peuvent prendre, indépendamment, des valeurs arbitraires, il est possible d'obtenir des informations sur leur coefficient respectif. Il faut bien remarquer ici que cette propriété n'est pas toujours vérifiée : dans le cas d'un matériau incompressible pour lequel la masse volumique est fonction de la température, $\rho = f(\theta)$, il existe alors une relation entre $\dot{\theta}$ et d_{kl} par l'intermédiaire de la conservation de la masse[8]. Donc, lorsque le milieu visco-élastique n'est pas

[8]Pour un milieu incompressible, la trace du tenseur de vitesse de déformation vaut : $d_{kk} = -\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -\frac{f'(\theta)}{f(\theta)}\dot{\theta}$.

incompressible, il est possible de prendre $d_{kl} \equiv 0$ et $\theta_{,k} \equiv 0$ dans (I.31). Puisque $\rho > 0$, il vient dans ce cas

$$-(\frac{\partial \psi}{\partial \theta} + s)\dot{\theta} \geq 0 \quad \forall \dot{\theta} \tag{I.32}$$

Le terme $-(\frac{\partial \psi}{\partial \theta} + s)$ est une fonction d'état des variables d'état $(\theta, \mathbf{E})$ et n'est donc pas fonction de $\dot{\theta}$. Pour que la dissipation (I.32) soit non négative dans toute évolution thermomécanique infinitésimale, c'est-à-dire pour toute valeur de $\dot{\theta}$, il faut que le facteur de $\dot{\theta}$ soit nul. Il vient alors

$$s = -\frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad \text{et donc} \quad \epsilon = \psi - \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \tag{I.33}$$

d'après la définition de l'énergie libre (I.24). L'inégalité fondamentale se réduit maintenant à

$$\underbrace{(\sigma_{kl} - \rho x_{k,K} \left(\partial \psi / \partial E_{KL}\right) x_{l,L}) d_{kl}}_{\Phi_{int}} - \underbrace{\frac{q_k}{\theta} \theta_{,k}}_{\Phi_{th}} \geq 0 \tag{I.34}$$

Remarque Si le tenseur de Cauchy σ_{kl} vaut

$$\bar{\sigma}_{kl} = \rho x_{k,K} \left(\partial \psi / \partial E_{KL}\right) x_{l,L} \tag{I.35}$$

la dissipation volumique intrinsèque est nulle ($\Phi_{int} = 0$). Autrement dit, si $\sigma_{kl} = \bar{\sigma}_{kl}$ l'évolution du milieu se fait sans perte visqueuse (les pertes sont seulement d'origine thermique). Le materiau est alors appelé matériau thermoélastique.

Dans le cas général, avec pertes visqueuses, l'inégalité (I.34) peut s'écrire

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \geq 0, \quad \forall \mathbf{b}$$

si les vecteurs $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ sont définis par

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} \sigma_{kl} - \bar{\sigma}_{kl} \\ -\frac{q_k}{\theta} \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} d_{kl} \\ \theta_{,k} \end{bmatrix}$$

Le vecteur $\mathbf{a}$ est donc nécéssairement au moins une fonction de $\mathbf{b}$, soit *a priori*

$$\begin{aligned} \sigma_{kl} - \bar{\sigma}_{kl} &= f_{kl}(\theta, E_{KL}, d_{kl}, \theta_{,k}) \\ -\frac{q_k}{\theta} &= g_k(\theta, E_{KL}, d_{kl}, \theta_{,k}) \end{aligned}$$

où le tenseur $\mathbf{f}$ et le vecteur $\mathbf{g}$ doivent être choisis tels que

$$f_{kl} d_{kl} + g_k \theta_{,k} \geq 0$$

Il reste maintenant à choisir un mécanisme de dissipation, en principe déduit des constatations expérimentales. Généralement, la dissipation intrinsèque est considérée comme fonction des vitesses de déformation et de la température uniquement.

$$f_{kl}(\theta, \mathbf{d}) = k(\theta) d_{kl}, \quad k(\theta) > 0$$

La dissipation thermique est considérée comme fonction du gradient de température et de la température.

$$g_k(\theta, \nabla\theta) = \frac{\alpha(\theta)}{\theta} \theta_{,k}, \quad \alpha(\theta) > 0$$

Pour ce choix de mécanisme de dissipation, les lois de comportement mécanique et thermique sont

$$\sigma_{kl} = \bar{\sigma}_{kl} + k(\theta) d_{kl}, \quad q_k = -\alpha(\theta) \theta_{,k} \tag{I.36}$$

Cette dernière loi de comportement thermique est la loi de conductivité classique, dite de Fourier, où $\alpha(\theta) > 0$ est le coefficient de conductivité thermique à la température θ.

Pour terminer la modélisation, il faut exprimer l'énergie libre ψ en fonction des variables d'état indépendantes $(\theta, \mathbf{E})$ et ainsi obtenir par l'intermédiaire des formules (I.33) et (I.35) les expressions de l'entropie spécifique s, de l'énergie spécifique interne ϵ et du tenseur des contraintes sans dissipation intrinsèque $\bar{\sigma}_{kl}$.

Représentation lagrangienne

Tous les résultats de la section précédente sont établis en variables eulériennes dans la configuration actuelle κ_t. Les densités massiques ϵ, s et ψ demeurent inchangées en représentation lagrangienne compte tenu de la conservation de la masse. Il est utile pour la suite d'écrire l'inégalité fondamentale (I.25) dans la configuration de référence κ_0. Ce changement de variable met en jeu le tenseur de Piola-Kirchhoff Σ_{KL} qui est relié au tenseur de Cauchy par

$$\sigma_{kl}.d_{kl}d\Omega_t = \Sigma_{KL}\dot{E}_{KL}d\Omega_0 \tag{I.37}$$

soit puisque $d\Omega_t = jd\Omega_0 = \frac{\rho_0}{\rho}d\Omega_0$

$$\frac{\rho_0}{\rho}\sigma_{kl}.d_{kl} = \Sigma_{KL}\dot{E}_{KL}$$

En multipliant (I.25) par $\frac{\rho_0}{\rho}$ et en posant

$$Q_K = jq_k X_{K,k}, \tag{I.38}$$

il est posible d'obtenir la forme lagrangienne de l'inégalité de Clausius-Duhem

$$\underbrace{-\rho_0(\dot{\psi} + s\dot{\theta}) + \Sigma_{KL}\dot{E}_{KL}}_{\Phi_{int}} \underbrace{-\frac{Q_K}{\theta}\theta_{,K}}_{\Phi_{th}} \geq 0 \tag{I.39}$$

où $\theta_{,K}$ représente le gradient lagrangien de la température. En introduisant la dérivée particulaire (I.29) de ψ, il vient l'équivalent de la formule (I.31) en représentation lagrangienne

$$\underbrace{-\rho_0(\frac{\partial\psi}{\partial\theta} + s)\dot{\theta} + (\Sigma_{kl} - \rho_0\left(\partial\psi/\partial E_{KL}\right))\dot{E}_{kl}}_{\Phi_{int}} - \underbrace{\frac{Q_K}{\theta}\theta_{,K}}_{\Phi_{th}} \geq 0 \tag{I.40}$$

Il est alors possible, en invoquant l'indépendance des variables $\dot{\theta}$, $\dot{E}_{kl}$ et $\theta_{,K}$ de faire le même raisonnement qui a permis d'obtenir les formules (I.32) à (I.34), et d'introduire ainsi le tenseur lagrangien de contrainte

$$\bar{\Sigma}_{KL} = \rho_0\left(\partial\psi/\partial E_{KL}\right) \tag{I.41}$$

pour décrire les phénomènes sans dissipation intrinsèque (réversibilité intrinsèque).

Solide isotrope Le principe de respect des symétries de la matière permet de préciser la forme qu'a nécessairement la fonction ψ. En effet, si le solide est isotrope, l'énergie libre ψ doit être invariante pour toute transformation orthogonale $\mathbf{S}$ des coordonnées de la configuration de référence. Une telle transformation orthogonale s'écrit, mathématiquement,

$$\hat{X}_K = S_{KL}X_L \tag{I.42}$$

avec

$$S_{KM}S_{LM} = S_{MK}S_{ML} = \delta_{KL}, \quad \det S_{KL} = \pm 1 \tag{I.43}$$

Par cette transformation, le tenseur des déformations $\mathbf{E}$ devient

$$\hat{E}_{KL} = S_{KM}E_{MN}S_{LN} \tag{I.44}$$

L'énergie libre doit donc pouvoir s'écrire

$$\psi(\theta, \mathbf{E}) = \psi(\theta, \mathbf{SES}^t), \quad \forall \mathbf{S} \text{ orthogonal} \tag{I.45}$$

La fonction ψ est donc une fonction *isotrope* de son second argument $\mathbf{E}$. La théorie des fonctions isotropes montre que l'énergie libre est nécessairement une fonction d'invariants I_1, I_2 et I_3 du tenseur $\mathbf{E}$

$$\psi = \psi(\theta, I_1, I_2, I_3) \tag{I.46}$$

Par pure convenance, on choisit comme invariants

$$I_1 = tr(\mathbf{E}), \quad I_2 = \frac{1}{2}tr(\mathbf{E}^2), \quad I_3 = \frac{1}{2}tr(\mathbf{E}^3) \tag{I.47}$$

où $tr(\mathbf{E})$ représente la trace du tenseur E. Les dérivées partielles des invariants sont données par

$$(\partial I_1/\partial E_{KL}) = \delta_{KL}, \quad (\partial I_2/\partial E_{KL}) = E_{KL}, \quad (\partial I_3/\partial E_{KL}) = E_{KM}E_{ML}$$

Ce qui permet d'obtenir une expression du tenseur de contrainte en thermoélasticité isotrope

$$\bar{\Sigma}_{KL} = \rho_0 \left[(\partial\psi/\partial I_1)\, \delta_{KL} + (\partial\psi/\partial I_2)\, E_{KL} + (\partial\psi/\partial I_3)\, E_{KM}E_{ML} \right] \tag{I.48}$$

dans laquelle les termes $(\partial\psi/\partial I_1)$, $(\partial\psi/\partial I_2)$ et $(\partial\psi/\partial I_3)$ sont *a priori* des fonctions de θ, I_1, I_2 et I_3.

3.3 Linéarisation de la loi de comportement

Dans l'approximation des déformations *infinitésimales*, où le tenseur $\mathbf{E}$ est approximé par le tenseur $\tilde{\mathbf{E}}$ avec $\|\tilde{\mathbf{E}}\| \ll 1$, et des petites variations de température $\tau = \theta - \theta_0 \ll 1$, il est possible de linéariser la loi de comportement (I.41) en limitant le développement de ψ au second ordre en τ et $\mathbf{E}$.

Représentation lagrangienne

La fonction ψ doit donc être une fonction scalaire du second degré des variables τ et $\mathbf{E}$. A une constante additive près, sans importance puisque ψ n'intervient que par ses dérivées dans la loi de comportement, la forme la plus générale proposée par Salençon [3] est

$$\rho_0\psi = \Sigma^0_{KL}\tilde{E}_{KL} - \rho_0 s_0 \tau + \frac{1}{2}A_{KLMN}\tilde{E}_{KL}\tilde{E}_{MN} - \frac{1}{2}\rho_0 b\tau^2 - B_{KL}\tilde{E}_{KL}\tau \tag{I.49}$$

où s_0, b sont des constantes scalaires, Σ^0, B sont des tenseurs du second ordre constants et $\mathbf{A}$ un tenseur du quatrième ordre constant qui vérifie les propriétés de symétrie suivantes

$$A_{KLMN} = A_{LKMN} = A_{KLNM} = A_{LKNM} = A_{MNKL}$$

Compte tenu de l'expression de ψ (I.49), la loi de comportement thermoélastique linéaire se déduit de (I.41) pour donner

$$\bar{\Sigma}_{KL} = \Sigma^0_{KL} + A_{KLMN}\tilde{E}_{MN} - B_{KL}\tau \tag{I.50}$$

et l'entropie massique s'écrit

$$s = s_0 + b\tau + \frac{1}{\rho_0}B_{KL}\tilde{E}_{KL} \tag{I.51}$$

Solide isotrope Pour un solide isotrope la fonction ψ ne doit faire intervenir que les invariants du tenseur de déformations infinitésimales $\tilde{\mathbf{E}}$ et l'écart de température τ. Compte tenu de l'ordre de l'invariant I_1 (resp. I_2 et I_3) qui vaut 1 (resp. 2 et 3), la forme la plus génerale est

$$\rho_0\psi = \Sigma^0 I_1 - \rho_0 s_0\tau + \frac{\lambda}{2}I_1^2 + 2\mu I_2 - \frac{1}{2}\rho_0 b\tau^2 - BI_1\tau \tag{I.52}$$

où s_0, b, Σ^0, B, λ et μ sont maintenant des scalaires constants. Les paramètres λ et μ sont les coefficients de Lamé et dépendent du matériau. Le champ de contrainte initial Σ^0 est uniforme puisque que le matériau est supposé être isotrope dans la configuration initiale. Dans ces conditions, en utilisant la relation (I.48) le tenseur de contrainte vaut

$$\bar{\Sigma}_{KL} = \Sigma^0\delta_{KL} + 2\mu\tilde{E}_{KL} + \lambda tr(\tilde{\mathbf{E}})\delta_{KL} - B\tau\delta_{KL} \tag{I.53}$$

et l'entropie peut s'exprimer par

$$s = s_0 + b\tau + \frac{1}{\rho_0}Btr(\tilde{\mathbf{E}}) \tag{I.54}$$

Représentation eulérienne

Le calcul du tenseur de contrainte eulérien sans dissipation intrinsèque est obtenue en considérant la formule

$$\bar{\sigma}_{kl} = \frac{\rho}{\rho_0}x_{k,K}\bar{\Sigma}_{KL}x_{l,L} \tag{I.55}$$

issue de (I.37) et (I.30). Dans cette formule les termes $\frac{\rho}{\rho_0}$ et $x_{k,K}$ peuvent être remplacés par leur développement au premier ordre

$$\frac{\rho}{\rho_0} = j^{-1} \simeq 1 - u_{m,m} = 1 - tr(\tilde{\mathbf{e}}), \quad x_{k,K} = \delta_{k,K} + u_{k,K}$$

où $\mathbf{u}$ est le vecteur des "petits" déplacements. Avec les lois de comportement linéarisées (I.50) pour les solides anisotropes et (I.53) pour les solides isotropes et en ne conservant que les termes du premier ordre, il vient alors pour un solide anisotrope

$$\bar{\sigma}_{kl} = [1 - tr(\tilde{\mathbf{e}})]\,\Sigma^0_{kl} + \Sigma^0_{km}u_{l,m} + \Sigma^0_{ml}u_{k,m} + C_{klmn}\tilde{e}_{mn} - B_{kl}\tau \tag{I.56}$$

et pour un solide isotrope

$$\bar{\sigma}_{kl} = \Sigma^0\left[2\delta_{kl} - tr(\tilde{\mathbf{e}})\delta_{kl} + 2\tilde{e}_{kl}\right] + 2\mu\tilde{e}_{kl} + \lambda tr(\tilde{\mathbf{e}})\delta_{kl} - B\tau\delta_{kl} \tag{I.57}$$

Avec

$$C_{klmn} = A_{KLMN}\delta_{Kk}\delta_{Ll}\delta_{Mm}\delta_{Nn}, \quad B_{kl} = B_{KL}\delta_{Kk}\delta_{Ll}$$

Ces tenseurs sont généralement exprimés sans les termes dus à la précontrainte ($\Sigma^0_{kl} \equiv 0$ ou $\Sigma^0 \equiv 0$). Ce qui donne successivement, dans le cas anisotrope et isotrope, les formules classiques suivantes

$$\bar{\sigma}_{kl} = C_{klmn}\tilde{e}_{mn} - B_{kl}\tau \tag{I.58}$$

$$\bar{\sigma}_{kl} = 2\mu\tilde{e}_{kl} + \lambda tr(\tilde{\mathbf{e}})\delta_{kl} - B\tau\delta_{kl} \tag{I.59}$$

Bien entendu, pour terminer il faut ajouter à ces expressions la contribution des effets visqueux donnés par la formule (I.36). Ce qui donne

$$\sigma_{kl} = \bar{\sigma}_{kl} + k(\theta)d_{kl}. \tag{I.60}$$

Il existe d'autres modèles pour décire la dissipation par viscosité pour des matériaux à mémoire. Pour ces matériaux une fonction de relaxation C' est introduite [6, 7] et le tenseur de contrainte σ_{kl} peut se mettre sous la forme

$$\sigma_{kl}(t) = \bar{\sigma}_{kl} + \int_{-\infty}^{t} C'_{klmn}(t-\tau)\tilde{e}_{mn}(\tau)d\tau \tag{I.61}$$

∼ ⋆ ∽

Finalement, les équations du mouvement (I.12)-(I.21) et la loi de comportement (I.60) ou (I.61) fournissent le cadre théorique qui permet une prévision des mouvements et des efforts intérieurs, à partir des conditions initiales et des données spécifiant les actions extérieures exercées sur le système étudié.

II

Problèmes aux limites en élastodynamique linéaire

Le but de ce chapitre est d'exposer la formalisation mathématique du problème de propagation d'onde dans un solide élastique en prenant en compte les conditions aux limites. Le problème est envisagé dans le cadre de l'élasticité linéaire dynamique (élastodynamique linéaire) où, dans un premier temps, par souci de simplification, les phénomènes de viscosité et de propagation de chaleur ne seront pas pris en compte. Toujours dans un souci didactique, le comportement dynamique d'un solide fixé sur une partie de sa surface, appelée surface de Dirichlet, est d'abord traité. Dans ce cas, il est d'usage de parler de condition de Dirichlet homogène (nulle). Ce problème est noté P_0. Dans un second temps, le problème $P_{\bar{u}}$ est envisagé. Il correspond à l'étude du comportement dynamique d'un solide soumis à des déplacements $\bar{\mathbf{u}}$ imposés sur sa surface de Dirichlet.

L'étude du problème P_0 permet d'introduire les notions de formulation variationnelle et de principe variationnel (principe de moindre action de Maupertuis et Hamilton) associées aux équations différentielles du mouvement (section 1). Ce cadre étant fixé, la formulation du problème élastodynamique $P_{\bar{u}}$ sous la forme d'un problème d'optimisation sous contrainte devient plus évidente (section 2).

Pour les problèmes P_0 et $P_{\bar{u}}$ les mêmes notations sont employées. Le solide élastique considéré est représenté par le domaine Ω limité par une surface $\partial\Omega$ de classe $C1$ par morceaux (cf. figure II.1). La surface $\partial\Omega$ est composée de deux surfaces disjointes : d'une part, la surface de Neumann Γ_n sur laquelle le champ de force surfacique $\bar{\mathbf{t}}(\mathbf{x}, t)$ est imposé et d'autre part la surface de Dirichlet Γ_d sur laquelle les déplacements $\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}; t)$ sont supposés connus. Les forces imposées à l'intérieur du domaine Ω sont caractérisées par la fonction $\bar{\mathbf{f}}(\mathbf{x}, t)$. L'objectif est alors de calculer le champ de

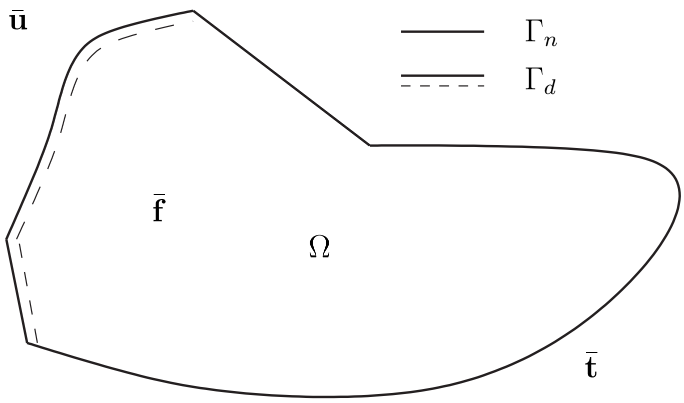


FIG. II.1. **Solide élastique soumis à des conditions aux limites** Un solide élastique est représenté par un domaine Ω limité par une surface $\partial\Omega = \Gamma_n \cup \Gamma_d$.

déplacement $\mathbf{u}(\mathbf{x}; t)$ et le champ de contrainte $\sigma_{kl}(\mathbf{x}; t)$ dans le volume élastique Ω en fonction des données du problème ($\bar{\mathbf{f}}$, $\bar{\mathbf{t}}$ et $\bar{\mathbf{u}}$). Pour traiter les problèmes d'interaction entre structures, il est aussi nécessaire de déterminer les forces $\mathbf{t}$ et les déplacements $\mathbf{u}$ sur la surface $\partial\Omega$ qui ne sont pas prescrits par les conditions aux limites. C'est-à-dire les forces sur la surface de Dirichlet et les déplacements sur la surface de Neumann.

1 PROBLÈME P_0 : CONDITION DE DIRICHLET HOMOGÈNE

Cette section décline et discute trois formulations des équations du mouvement : problème aux limites, formulation variationnelle et optimisation.

1.1 Équations du mouvement

Compte tenu des hypothèses formulées dans l'introduction de ce chapitre (élastodynamique linéaire sans phènomène visqueux ou thermique), les équations dynamiques du mouvement concernant un solide élastique fixé sur sa surface de Dirichlet sont les suivantes (cf. chap. I)

Problème P_0

- Relation fondamentale de la dynamique, symétrie du tenseur des contraintes et loi de comportement

$$\rho \bar{f}_k + \sigma_{kl,l}(\mathbf{u}) = \rho \ddot{u}_k \qquad \text{dans } \Omega \qquad \text{(II.1)}$$

$$\sigma_{kl} = \sigma_{lk} \qquad \text{dans } \Omega \qquad \text{(II.2)}$$

$$\sigma_{kl}(\mathbf{u}) = C_{klmn} u_{m,n} \qquad \text{dans } \Omega \qquad \text{(II.3)}$$

- Conditions aux limites

$$\mathbf{u} = 0 \qquad \text{sur } \Gamma_d \text{ (Dirichlet)} \tag{II.4}$$

$$\sigma_{kl}(\mathbf{u})n_l = \bar{t}_k \qquad \text{sur } \Gamma_n \text{ (Neumann)} \tag{II.5}$$

- Conditions initiales

$$\mathbf{u}(\mathbf{x},0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \qquad \text{dans } \bar{\Omega} \text{ (déplacement initial)} \tag{II.6}$$

$$\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x},0) = \dot{\mathbf{u}}_0(\mathbf{x}) \qquad \text{dans } \bar{\Omega} \text{ (vitesse initiale)} \tag{II.7}$$

1.2 Formulation variationnelle

La méthode des éléments finis, que nous présenterons plus loin, nécessite une formulation "faible" du problème aux dérivées partielles exposé ci-dessus. Il s'agit d'une formulation équivalente[1] présentée sous la forme d'une équation (voire d'une inéquation) variationnelle. Généralement, elle est elle-même issue d'un problème d'optimisation d'une fonctionnelle.

Principe des puissances virtuelles

Pour obtenir une formulation variationnelle de ce problème élastodynamique il suffit de multiplier la relation fondamentale de la dynamique (II.1) par une fonction $\mathbf{v}$ *a priori* arbitraire, d'intégrer sur le volume Ω et d'utiliser la formule de Green d'intégration par partie. La première opération donne

$$\int_\Omega \rho f_k v_k \, dv + \int_\Omega \sigma_{kl,l}(\mathbf{u}) v_k \, dv = \int_\Omega \rho \ddot{u}_k v_k \, dv.$$

et l'intégration par partie du second terme s'écrit

$$\begin{aligned} \int_\Omega \sigma_{kl,l}(\mathbf{u}) v_k \, dv &= \int_\Omega \left[\sigma_{kl}(\mathbf{u}) v_k\right]_{,l} \, dv - \int_\Omega \sigma_{kl}(\mathbf{u}) v_{k,l} \, dv \\ &= \int_{\partial\Omega} \sigma_{kl}(\mathbf{u}) n_l v_k \, ds - \int_\Omega \sigma_{kl}(\mathbf{u}) v_{k,l} \, dv \end{aligned}$$

Le report de cette expression dans l'équation précédente permet d'obtenir, pour toute fonction $\mathbf{v}$ arbitraire, la relation

$$\int_\Omega \rho \ddot{u}_k v_k \, dv + \int_\Omega \sigma_{kl}(\mathbf{u}) v_{k,l} \, dv = \int_\Omega \rho f_k v_k \, dv + \int_{\partial\Omega} \sigma_{kl}(\mathbf{u}) n_l v_k \, ds \tag{II.8}$$

Cette dernière intégrale de surface peut se décomposer en deux parties

$$\int_{\partial\Omega} (\quad) = \int_{\Gamma_n} (\quad) + \int_{\Gamma_d} (\quad)$$

Dans la première intégrale du membre de droite la condition à la limite de Neumann (II.5) est utilisée. Il vient alors pour toute fonction v **arbitraire s'annulant sur la surface** Γ_d,

$$\int_\Omega \rho \ddot{u}_k v_k \, dv + \int_\Omega \sigma_{kl}(\mathbf{u}) v_{k,l} \, dv = \int_\Omega \rho f_k v_k \, dv + \int_{\Gamma_n} t_k v_k \, ds \tag{II.9}$$

C'est une équation variationnelle généralement appelée principe des puissances virtuelles qui traduit l'équilibre dynamique entre les forces d'inertie, les forces élastiques et les forces extérieures "travaillant" dans le champ de vitesse virtuelle $\mathbf{v}$ [8].

[1] En fait, il convient de préciser au sens mathématique les relations entre la solution du problème variationnel et la solution du problème classique aux dérivées partielles

Equation variationnelle

Pour être plus rigoureux, il convient de trouver un espace vectoriel normé $\mathcal{E}$ de fonctions $\mathbf{v}$ suffisamment régulières de manière à ce que les intégrales introduites ci-dessus aient un sens. Pour les problèmes d'élasticité, cet ensemble est l'espace de Sobolev $\mathbf{H}^1(\Omega)$ associé au domaine Ω

$$\mathcal{E} \triangleq \mathbf{H}^1(\Omega) \triangleq (\mathrm{H}^1(\Omega))^3$$

où chaque espace $\mathrm{H}^1(\Omega)$ correspond à une direction de l'espace tridimensionnel. Les éléments de $\mathrm{H}^1(\Omega)$ sont des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ (fonctions scalaires) dont les dérivées spatiales jusqu'à l'ordre 1 sont de carrés sommables. Pour établir la relation (II.9) la fonction $\mathbf{v}$ doit aussi s'annuler sur la surface Γ_d (c'est-à-dire vérifier la condition de Dirichlet (II.4)). L'espace des fonctions admissibles

$$\mathcal{U}_{ad}^0 \triangleq \{\mathbf{v} \in \mathcal{E} \mid \mathbf{v} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_d\} \tag{II.10}$$

est introduit à cet effet. Il est aussi d'usage de définir, sur l'ensemble $\mathcal{E}\times\mathcal{E}$, les deux formes bilinéaires $m(.,.)$ et $k(.,.)$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, par

$$m(\mathbf{u},\mathbf{v}) \triangleq \int_\Omega \rho u_k v_k \, dv, \quad \mathbf{u},\mathbf{v} \in \mathcal{E}, \quad \text{et} \tag{II.11}$$

$$k(\mathbf{u},\mathbf{v}) \triangleq \int_\Omega \sigma_{kl}(\mathbf{u}) v_{k,l} \, dv, \quad \mathbf{u},\mathbf{v} \in \mathcal{E}. \tag{II.12}$$

Enfin, il est pratique d'écrire la puissance (ou le travail) des forces extérieures dans le champ de vitesse virtuelle $\mathbf{v}$ (ou déplacement virtuel) par la forme linéaire de $\mathcal{E}$ dans $\mathbb{R}$

$$\langle \psi \mid \mathbf{v} \rangle \triangleq \int_\Omega \rho f_k v_k \, dv + \int_{\Gamma_n} t_k v_k \, ds, \tag{II.13}$$

Avec ces définitions et notations, la formulation variationnelle du problème P_0 s'écrit sous la forme

$$\begin{cases} \text{trouver la fonction } t \to \mathbf{u}(t) \text{ de } [0,\tau] \to \mathcal{U}_{ad}^0, \\ \text{verifiant les conditions initiales (II.6) et (II.7),} \\ \text{telle que } \forall t \in [0,\tau] \text{ et } \forall \mathbf{v} \in \mathcal{U}_{ad}^0, \\ m(\ddot{\mathbf{u}}(t),\mathbf{v}) + k(\mathbf{u}(t),\mathbf{v}) = \langle \psi(t) \mid \mathbf{v} \rangle \end{cases} \tag{II.14}$$

Autrement dit, à chaque instant t, parmi toutes les configurations admissibles $\mathbf{v}$ du système mécanique, il existe[2] une configuration privilégiée $\mathbf{u}(t)$, qui répond aux exigences des lois de la mécanique des milieux continus. L'ensemble des configurations $\mathbf{u}(t)$ pour toutes les dates $t \in [0,\tau]$ correspond au déplacement effectivement suivi par le système physique entre les instants $t = 0$ et $t = \tau$. Il doit donc exister un *critère* $\mathcal{J}$, c'est-à-dire un nombre $\mathcal{J}(\mathbf{v})$ associé à chaque configuration $\mathbf{v}$ qui permette de différencier la configuration $\mathbf{u}$ des autres configurations possibles $\mathbf{v}$. Si le choix de ce critère est un critère d'optimisation, il peut se mettre sous la forme mathématique

$$\mathcal{J}(\mathbf{u}) = \inf \mathcal{J}(\mathbf{v}), \quad (\text{ou } \mathcal{J}(\mathbf{u}) = \sup \mathcal{J}(\mathbf{v})), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{U}_{ad}^0 \tag{II.15}$$

En définissant la dérivée de $\mathcal{J}$ en $\mathbf{u}$ dans la direction $\mathbf{v}$ par l'expression

$$(\nabla\mathcal{J}(\mathbf{u}),\mathbf{v}) = \lim_{\theta\to 0} \frac{\mathcal{J}(\mathbf{u}+\theta\mathbf{v}) - \mathcal{J}(\mathbf{u})}{\theta} \tag{II.16}$$

il est montré à l'annexe A que le problème d'optimisation (II.15) revient à annuler la dérivée de $\mathcal{J}$ en $\mathbf{u}$, c'est-à-dire

$$\text{trouver } \mathbf{u} \in \mathcal{U}_{ad}^0 \text{ telle que } (\nabla\mathcal{J}(\mathbf{u}),\mathbf{v}) = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{U}_{ad}^0 \tag{II.17}$$

[2] Dans ce cas, l'unicité de la solution se démontre facilement par des considérations énergétiques [9]

1.3 Optimisation de la fonctionnelle de Hamilton

Quel est donc ce critère, dont la dérivée s'annulant au "point" $\mathbf{u}$, fournit l'équation variationnelle

$$m(\ddot{\mathbf{u}}(t), \mathbf{v}) + k(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}) - \langle \psi(t) \,|\, \mathbf{v} \rangle = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{U}^0_{ad} \quad ?$$

L'opération qui consiste à passer de cette équation au critère $\mathcal{J}$ n'est pas triviale. Elle correspond à une "intégration". On doit la résolution de ce type de problème aux travaux de Lagrange, d'Alembert ou encore de Hamilton qui travaillèrent plus généralement sur les systèmes différentiels issus de la mécanique Newtonienne pour les mettre sous la forme équivalente d'un problème d'optimisation. Dans le cas qui nous intéresse, ceci nous amène au principe de Hamilton :

Principe 1.1 *Un système dynamique évolue de manière à optimiser la différence,* $\mathrm{T} - \mathrm{V}$*, entre son énergie cinétique et son énergie potentielle totale moyennée dans le temps*

$$\mathcal{J}(\mathbf{v}) = \int_0^\tau (\mathrm{T} - \mathrm{V})\, dt \tag{II.18}$$

L'énergie cinétique, T, correspond à l'"intégration" de la forme bilinéaire $m(.,.)$. Elle est définie de $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$ dans $\mathbb{R}$ par la forme

$$\mathrm{T}(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} m(\dot{\mathbf{v}}, \dot{\mathbf{v}}) = \frac{1}{2} \int_\Omega \rho \dot{v}_k \dot{v}_k \, dv, \tag{II.19}$$

Quant à l'énergie potentielle totale V, elle représente la différence de l'énergie potentielle de déformation, issue de l'"intégration" de la forme $k(.,.)$, et de la puissance des forces extérieures s'exerçant dans le champ de vitesse $\mathbf{v}$

$$\mathrm{V}(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} k(\mathbf{v}, \mathbf{v}) - \langle \psi \,|\, \mathbf{v} \rangle = \frac{1}{2} \int_\Omega \sigma_{kl}(\mathbf{v}) v_{k,l} \, dv - \int_\Omega \rho f_k v_k \, dv - \int_{\Gamma_n} t_k v_k \, ds, \tag{II.20}$$

De façon à être cohérent avec la formulation des problèmes statiques pour laquelle seule la fonctionnelle d'énergie potentielle totale V est minimisée, la fonctionnelle de Hamilton sera écrite dans la suite sous la forme de l'opposé de (II.18)

$$\mathcal{J}(\mathbf{v}) = \int_0^\tau (\mathrm{V} - \mathrm{T})\, dt \tag{II.21}$$

La formulation variationnelle (II.14) est alors équivalente à la minimisation de cette fonctionnelle sur l'ensemble des fonctions admissibles $\mathcal{U}^0_{ad}$. Ce qui revient à rechercher la fonction qui à t fait correspondre $\mathbf{u}(t)$, définie de $[0, \tau]$ dans $\mathcal{U}^0_{ad}$, telle que

$$\mathcal{J}(\mathbf{u}) = \inf_{\mathcal{U}^0_{ad}} \mathcal{J}(\mathbf{v}) \tag{II.22}$$

A l'inverse, partant de la fonctionnelle de Hamilton, il est possible de vérifier que le principe de minimisation ci-dessus permet d'obtenir la formulation variationnelle (II.14). En effet, avec la définition de la dérivée (II.16), les dérivées de l'énergie cinétique[3] et de l'énergie potentielle totale sont respectivement

$$(\nabla \mathrm{T}(\mathbf{u}), \mathbf{v}) = m(\dot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{v}}) = \frac{d}{dt} m(\dot{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) - m(\ddot{\mathbf{u}}, \mathbf{v}), \tag{II.23}$$

$$(\nabla \mathrm{V}(\mathbf{u}), \mathbf{v}) = k(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - \langle \psi \,|\, \mathbf{v} \rangle, \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{E}. \tag{II.24}$$

[3] En utilisant les propriétés de la dérivée particulaire d'une quantité définie par unité de masse (I.22).

Remplaçant ces expressions dans l'équation (II.17) qui exprime la nullité de la dérivée de la fonctionnelle de Hamilton $\mathcal{J}$, il vient

$$\int_0^\tau [m(\ddot{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) + k(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - \langle \psi \,|\, \mathbf{v} \rangle] \, dt - [m(\dot{\mathbf{u}}, \mathbf{v})]_0^\tau = 0$$

Si la vitesse virtuelle s'annule sur les bords de l'intervalle temporel $[0, \tau]$, le dernier terme disparaît. Puisque le champ de vitesse virtuel est par ailleurs arbitraire cette dernière équation redonne bien la formulation variationnelle (II.14).

2 PROBLÈME $P_{\bar{U}}$: CONDITION DE DIRICHLET NON HOMOGÈNE

La théorie de l'optimisation permet alors d'envisager le problème élastodynamique $P_{\bar{u}}$ avec une condition de Dirichlet non homogène dont les équations du mouvement sont rappelées ci-dessous

Problème $P_{\bar{u}}$

- Relation fondamentale de la dynamique, symétrie du tenseur des contraintes et loi de comportement

$$\rho \bar{f}_k + \sigma_{kl,l}(\mathbf{u}) = \rho \ddot{u}_k \qquad \text{dans } \Omega \qquad \text{(II.25)}$$

$$\sigma_{kl} = \sigma_{lk} \qquad \text{dans } \Omega \qquad \text{(II.26)}$$

$$\sigma_{kl}(\mathbf{u}) = C_{klmn} u_{m,n} \qquad \text{dans } \Omega \qquad \text{(II.27)}$$

- Conditions aux limites

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \qquad \text{sur } \Gamma_d \text{ (Dirichlet)} \qquad \text{(II.28)}$$

$$\sigma_{kl}(\mathbf{u}) n_l = \bar{t}_k \qquad \text{sur } \Gamma_n \text{ (Neumann)} \qquad \text{(II.29)}$$

- Conditions initiales

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \qquad \text{dans } \bar{\Omega} \text{ (déplacement initial)} \qquad \text{(II.30)}$$

$$\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, 0) = \dot{\mathbf{u}}_0(\mathbf{x}) \qquad \text{dans } \bar{\Omega} \text{ (vitesse initiale)} \qquad \text{(II.31)}$$

Dans ce cas, il faut chercher la solution du problème parmi toutes les configurations $\mathbf{v}$ du système qui vérifient la condition de Dirichlet (II.28). La résolution de ce problème d'optimisation sous contrainte ne peut pas se résumer à "annuler la dérivée" de la fonctionnelle de Hamilton. En effet, le minimum absolu de cette fonctionnelle n'appartient pas forcement à l'ensemble des fonctions qui vérifient la contrainte de Dirichlet (voir annexe A section 3.1). Compte tenu de l'existence d'une contrainte, l'équation variationnelle (II.14) devient une inégalité variationnelle. Puisque qu'il est d'usage, du point de vue du calcul numérique, de traduire une équation variationnelle sous la forme d'un système linéaire, la présence d'une inégalité complique les choses. Cependant, en introduisant un multiplicateur de Lagrange, il est possible de se ramener à une simple équation. De plus, ce multiplicateur a une signification physique puisqu'il représente la force de réaction sur la surface de Dirichlet qui a été générée par les déplacements imposés $\bar{\mathbf{u}}$. Voyons dans le détail cette démarche.

2.1 Optimisation sous contrainte de Dirichlet

Du point de vue mathématique, et avant l'introduction d'un multiplicateur de Lagrange, le problème d'optimisation consiste à rechercher le champ de vitesse qui à t fait correspondre $\dot{\mathbf{u}}(t)$, défini de $[0, \tau]$ dans $\mathcal{U}_{ad}$, telle que

$$\mathcal{J}(\mathbf{u}) = \inf_{\mathcal{U}_{ad}} \mathcal{J}(\mathbf{v}) \qquad \text{(II.32)}$$

où $\mathcal{J}$ est la fonctionnelle de Hamilton (II.21) et $\mathcal{U}_{ad}(t)$ l'ensemble des vitesses admissibles défini, conformément à la condition (II.28), par

$$\mathcal{U}_{ad}(t) \triangleq \{\mathbf{v} \in \mathcal{E} \ \mid \ \mathbf{v} = \frac{d}{dt}\bar{\mathbf{u}}(t) \quad \text{sur } \Gamma_d\}. \tag{II.33}$$

Contrairement à $\mathcal{U}^0_{ad}$, cet ensemble n'est pas un sous espace vectoriel de $\mathcal{E}$ mais un ensemble convexe. D'après la théorie de l'optimisation sous contrainte (cf. annexe A ou [10]), résoudre le problème (II.32) c'est trouver la fonction $\dot{\mathbf{u}}(t) \in \mathcal{U}_{ad}(t)$ qui vérifie l'inéquation d'Euler

$$(\nabla\mathcal{J}(\mathbf{u}), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}) \geq 0, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{U}_{ad}. \tag{II.34}$$

Ce qui nous amène à l'inéquation variationnelle suivante [6]

$$\begin{cases} \text{trouver la fonction } t \rightarrow \dot{\mathbf{u}}(t) \text{ de } [0,\tau] \rightarrow \mathcal{U}_{ad}(t), \\ \text{verifiant les conditions initiales (II.6) et (II.7),} \\ \text{telle que } \forall t \in [0,\tau] \text{ et } \forall \mathbf{v} \in \mathcal{U}_{ad}, \\ m(\ddot{\mathbf{u}}(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}(t)) + k(\mathbf{u}(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}(t)) - \langle \psi(t) \,|\, \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}(t) \rangle \geq 0 \end{cases} \tag{II.35}$$

2.2 Muliplicateur de Lagrange

Le problème d'optimisation (II.32) soumis à la contrainte de Dirichlet peut se ramener à un problème d'optimisation sans contrainte. Auquel cas l'optimum est déterminé par une équation (et non plus une inéquation) traduisant l'annulation de la "dérivée" d'un Lagrangien bien choisi. Mathématiquement, l'ensemble convexe $\mathcal{U}_{ad}$ est remplacé par un espace vectoriel $\mathcal{W} = \mathcal{E} \times \mathcal{Z}$ où l'ensemble

$$\mathcal{Z} = \mathrm{H}^{-1/2}(\Gamma_d)$$

est le dual de l'ensemble $\mathrm{H}^{1/2}(\Gamma_d)$, lequel correspond aux déplacements de la surface de Dirichlet. Physiquement, l'ensemble $\mathcal{Z}$ "contient" les forces agissant sur la surface de Dirichlet. Le problème de minimisation (II.32) est alors équivalent à la détermination du couple $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\chi}) \in \mathcal{W}$ qui minimise le Lagrangien

$$\mathcal{L} : (\mathbf{v}, \boldsymbol{\kappa}) \in \mathcal{W} \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbf{v}, \boldsymbol{\kappa}) \in \mathbb{R}$$

defini par

$$\mathcal{L}(\mathbf{v}, \boldsymbol{\kappa}) = \mathcal{J}(\mathbf{v}) + \int_0^\tau \langle \boldsymbol{\kappa} \,|\, \mathbf{v} - \bar{\mathbf{u}} \rangle_{\Gamma_d} \, dt \tag{II.36}$$

La notation $\langle \,.\, | \,.\, \rangle_{\Gamma_d}$ représente le produit scalaire par dualité de $\mathrm{H}^{-1/2}(\Gamma_d) \times \mathrm{H}^{1/2}(\Gamma_d) \rightarrow \mathbb{R}$ défini par une intégrale portant sur la surface Γ_d

$$\langle \boldsymbol{\kappa} \,|\, \mathbf{v} - \bar{\mathbf{u}} \rangle_{\Gamma_d} = \int_{\Gamma_d} \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{v} - \bar{\mathbf{u}}) \, ds$$

Le couple $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\chi}) \in \mathcal{W}$ satisfait les équations

$$\begin{aligned} \langle \nabla\mathcal{L}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\chi}) \,|\, \mathbf{v} \rangle &= 0, && \forall \mathbf{v} \in \mathcal{E} \\ \langle \nabla\mathcal{L}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\chi}) \,|\, \boldsymbol{\kappa} \rangle &= 0, && \forall \boldsymbol{\kappa} \in Z \end{aligned}$$

Ce qui fournit la formulation variationnelle du problème $P_{\bar{u}}$ suivante

trouver $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\chi}) \in \mathcal{W}$ tels que

les cond. initiales (II.30) et (II.31) soient vérifiées et

$$m(\ddot{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) + k(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \langle \boldsymbol{\chi} \,|\, \mathbf{v} \rangle_{\Gamma_d} = \langle \psi(t) \,|\, \mathbf{v} \rangle \qquad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{E} \tag{II.37a}$$

$$\langle \boldsymbol{\kappa} \,|\, \mathbf{u} \rangle_{\Gamma_d} = \langle \boldsymbol{\kappa} \,|\, \bar{\mathbf{u}} \rangle_{\Gamma_d} \qquad \forall \boldsymbol{\kappa} \in \mathcal{Z} \tag{II.37b}$$

Interprétation physique Il est clair que cette dernière équation (II.37b) est la condition de Dirichlet. La première équation (II.37a) peut être établie en effectuant les calculs de la section 1.2 qui ont permis d'obtenir le principe des puissances virtuelles (II.9) sans faire l'hypothèse $\mathbf{v} = 0$ sur la surface de Dirichlet Γ_d. En refaisant ces calculs avec une vitesse virtuelle $\mathbf{v}$ arbitraire sur Γ_d (Eq. II.8) et en identifiant avec la formulation variationnelle (II.37a), il vient

$$\sigma_{kl}(\mathbf{u})n_l = -\chi_k, \quad \text{sur } \Gamma_d.$$

Ce qui exprime que le vecteur $\boldsymbol{\chi}$ correspond au vecteur contrainte $\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}$ lequel représente les forces de surface qui ont été générées par les déplacements imposés $\bar{\mathbf{u}}$. L'équation (II.37a) représente bien le principe des puissances virtuelles prenant en compte la condition de Dirichlet (homogène ou non).

Il faut remarquer ici, que la formulation vartiationnelle (II.37) peut encore s'écrire sous la forme très simple et classique

$$\begin{cases} \text{Trouver } \boldsymbol{\mathcal{U}} = (\mathbf{u}, \boldsymbol{\chi}) \in \mathcal{W} \text{ tel que} \\ \text{les cond. initiales (II.30) et (II.31) soient vérifiées et} \\ \mathrm{m}(\ddot{\boldsymbol{\mathcal{U}}}, \boldsymbol{\mathcal{V}}) + \mathrm{k}(\boldsymbol{\mathcal{U}}, \boldsymbol{\mathcal{V}}) = \langle \Psi(t) \,|\, \boldsymbol{\mathcal{V}} \rangle \qquad \forall \boldsymbol{\mathcal{V}} = (\mathbf{v}, \boldsymbol{\kappa}) \in \mathcal{W} \end{cases} \tag{II.38}$$

Et ce, à condition de définir de nouvelles formes bilinéraires de raideur et de masse agissant de $\mathcal{W} \times \mathcal{W}$ dans $\mathbb{R}$ se déduisant des anciennes par

$$\mathrm{k}(\boldsymbol{\mathcal{U}}, \boldsymbol{\mathcal{V}}) = k(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \langle \boldsymbol{\chi} \,|\, \mathbf{v} \rangle_{\Gamma_d} + \langle \boldsymbol{\kappa} \,|\, \mathbf{u} \rangle_{\Gamma_d}, \quad \mathrm{m}(\boldsymbol{\mathcal{U}}, \boldsymbol{\mathcal{V}}) = m(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \tag{II.39}$$

Dans la formulation (II.38) apparaît une nouvelle forme linéaire Ψ traduisant les influences extérieures (forces et déplacements) s'exerçant dans le champ virtuel $\boldsymbol{\mathcal{V}}$

$$\begin{aligned} \langle \Psi(t) \,|\, \boldsymbol{\mathcal{V}} \rangle &= \langle \psi(t) \,|\, \mathbf{v} \rangle + \langle \boldsymbol{\kappa} \,|\, \bar{\mathbf{u}} \rangle_{\Gamma_d} \\ &= \left\langle \rho \bar{\mathbf{f}} \,|\, \mathbf{v} \right\rangle_{\Omega} + \langle \bar{\mathbf{t}} \,|\, \mathbf{v} \rangle_{\Gamma_n} + \langle \boldsymbol{\kappa} \,|\, \bar{\mathbf{u}} \rangle_{\Gamma_d} \end{aligned} \tag{II.40}$$

2.3 Propriétés de la solution du problème $P_{\bar{u}}$

Démonstration de l'unicité

Soient $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\chi})$ et $(\mathbf{u}_1, \boldsymbol{\chi}_1)$ deux solutions éventuelles du problème $P_{\bar{u}}$ avec les mêmes données $(\bar{\mathbf{f}}, \bar{\mathbf{t}}, \bar{\mathbf{u}})$ et les mêmes conditions initiales $(\mathbf{u}_0, \dot{\mathbf{u}}_0)$. Prenant dans (II.37)

$$(\mathbf{v}, \boldsymbol{\kappa}) = (\dot{\mathbf{w}}, \boldsymbol{\zeta}), \quad \text{avec} \quad \dot{\mathbf{w}} = \dot{\mathbf{u}}_1 - \dot{\mathbf{u}}, \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\zeta} = \boldsymbol{\chi}_1 - \boldsymbol{\chi}$$

(respectivement $(\mathbf{v}, \boldsymbol{\kappa}) = (-\dot{\mathbf{w}}, -\boldsymbol{\zeta})$ dans la formulation variationnelle relative à $\mathbf{u}_1$) et ajoutant, il vient

$$-m(\ddot{\mathbf{w}}, \dot{\mathbf{w}}) - k(\mathbf{w}, \dot{\mathbf{w}}) = 0$$

soit encore

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}m(\dot{\mathbf{w}}, \dot{\mathbf{w}}) + \frac{1}{2}k(\mathbf{w}, \mathbf{w})\right] = \frac{d}{dt}\left[\mathrm{T}(\mathbf{w}) + \mathcal{W}(\mathbf{w})\right] = 0$$

La somme de l'énergie cinétique et de l'énergie de déformation associée à $\mathbf{w}$ ne varie donc pas dans le temps. Or, l'énergie initiale est nulle puisque les champs $\mathbf{w}$ et $\dot{\mathbf{w}}$ sont construits par différence des solutions $\mathbf{u}$ et $\mathbf{u}_1$ vérifiant les mêmes conditions initiales, donc

$$\mathrm{T}(\mathbf{w}) + \mathcal{W}(\mathbf{w}) = 0, \quad \forall t$$

L'énergie cinétique et l'énergie de déformation étant positives, le champ de vitesse $\dot{\mathbf{w}}(t)$ est forcément nul, ainsi que le champ de déplacement $\mathbf{w}$. Les solutions $\mathbf{u}$ et $\mathbf{u}_1$ sont donc confondues à tout

instant t. Comme il est possible de prolonger les champs $\mathbf{u}$ et $\mathbf{u}_1$ (identiques) sur la surface de Dirichlet par le champ de déplacement connu $\bar{\mathbf{u}}$, l'application de la loi de Hooke permet de conclure que les vecteurs de contrainte $\boldsymbol{\chi}$ et $\boldsymbol{\chi}_1$ sont eux aussi les mêmes. Ce qui montre l'unicité de la solution $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\chi})$.

Linéarité du problème $P_{\bar{u}}$

Soit $S(\bar{\mathbf{f}}, \bar{\mathbf{t}}, \bar{\mathbf{u}})$ la solution du problème $P_{\bar{u}}$ associée aux données $(\bar{\mathbf{f}}, \bar{\mathbf{t}}, \bar{\mathbf{u}})$, pour des conditions initiales $(\mathbf{u}_0, \dot{\mathbf{u}}_0)$ nulles. D'après la linéarité des opérateurs intervenant dans la formulation (II.37), cette solution peut s'écrire

$$S(\bar{\mathbf{f}}, \bar{\mathbf{t}}, \bar{\mathbf{u}}) = S(\bar{\mathbf{f}}, 0, 0) + S(0, \bar{\mathbf{t}}, 0) + S(0, 0, \bar{\mathbf{u}})$$

Multipliant par un scalaire, $\alpha \in \mathbb{R}$, la formulation (II.38) associée à la solution $S(\bar{\mathbf{f}}, 0, 0)$, il vient

$$\mathrm{m}(\alpha\ddot{\mathbf{u}}, \boldsymbol{\mathcal{V}}) + \mathrm{k}(\alpha\boldsymbol{\mathcal{U}}, \boldsymbol{\mathcal{V}}) = \int_\Omega \alpha\rho\bar{f}_k v_k \, dv \qquad \forall \boldsymbol{\mathcal{V}} \in \mathcal{W}$$

Le couple $\boldsymbol{\mathcal{W}} = (\mathbf{w}, \boldsymbol{\zeta}) = (\alpha\mathbf{u}, \alpha\boldsymbol{\chi}) = \alpha\boldsymbol{\mathcal{U}}$ est donc la solution du problème $P_{\bar{u}}$ avec les données $(\alpha\bar{\mathbf{f}}, 0, 0)$. Ce qui montre la linéarité de la solution par rapport à la donnée de force volumique $\bar{\mathbf{f}}$

$$S(\alpha\bar{\mathbf{f}}, 0, 0) = \alpha S(\bar{\mathbf{f}}, 0, 0)$$

Par un raisonnement similaire, il est simple d'établir la linéarité de la solution par rapport à tous les arguments $(\bar{\mathbf{f}}, \bar{\mathbf{t}}, \bar{\mathbf{u}})$, soit

$$S(\alpha_1\bar{\mathbf{f}}, \alpha_2\bar{\mathbf{t}}, \alpha_3\bar{\mathbf{u}}) = \alpha_1 S(\bar{\mathbf{f}}, 0, 0) + \alpha_2 S(0, \bar{\mathbf{t}}, 0) + \alpha_3 S(0, 0, \bar{\mathbf{u}}), \quad \forall(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3 \tag{II.41}$$

Identité de réciprocité de Maxwell-Betty

Soient $\boldsymbol{\mathcal{U}}_1 = (\mathbf{u}_1, \boldsymbol{\chi}_1)$ et $\boldsymbol{\mathcal{U}}_2 = (\mathbf{u}_2, \boldsymbol{\chi}_2)$ deux solutions élastodynamiques associées à deux systèmes de forces et déplacements imposés $(\bar{\mathbf{f}}_1, \bar{\mathbf{t}}_1, \bar{\mathbf{u}}_1)$ et $(\bar{\mathbf{f}}_2, \bar{\mathbf{t}}_2, \bar{\mathbf{u}}_2)$, vérifiant les conditions initiales $(\mathbf{u}_0^1, \dot{\mathbf{u}}_0^1)$ et $(\mathbf{u}_0^2, \dot{\mathbf{u}}_0^2)$ respectivement. L'identité de réciprocité de Maxwell-Betty est obtenue en soustrayant les formulations variationnelles (II.38) de chaque solution pour lesquelles la solution de l'une est choisie comme champ virtuel de l'autre. Il vient d'une part

$$\mathrm{m}(\ddot{\boldsymbol{\mathcal{U}}}_1, \boldsymbol{\mathcal{U}}_2) + \mathrm{k}(\boldsymbol{\mathcal{U}}_1, \boldsymbol{\mathcal{U}}_2) = \langle \Psi_1(t) \,|\, \boldsymbol{\mathcal{U}}_2 \rangle$$

et d'autre part

$$\mathrm{m}(\ddot{\boldsymbol{\mathcal{U}}}_2, \boldsymbol{\mathcal{U}}_1) + \mathrm{k}(\boldsymbol{\mathcal{U}}_2, \boldsymbol{\mathcal{U}}_1) = \langle \Psi_2(t) \,|\, \boldsymbol{\mathcal{U}}_1 \rangle$$

Par soustraction et compte tenu de la symétrie de la forme bilinéaire $\mathrm{k}(\boldsymbol{\mathcal{U}}, \boldsymbol{\mathcal{V}})$ définie en (II.39), on a

$$\mathrm{m}(\ddot{\boldsymbol{\mathcal{U}}}_1, \boldsymbol{\mathcal{U}}_2) - \mathrm{m}(\ddot{\boldsymbol{\mathcal{U}}}_2, \boldsymbol{\mathcal{U}}_1) = \langle \Psi_1(t) \,|\, \boldsymbol{\mathcal{U}}_2 \rangle - \langle \Psi_2(t) \,|\, \boldsymbol{\mathcal{U}}_1 \rangle$$

Cette identité reste vraie si les deux solutions élastodynamiques sont prises à des instants différents $\tau = t$ et $\tau = t - \tau$. L'intégration de $\tau = 0$ à $\tau = t$ de l'équation ainsi obtenue conduit, compte tenu de la relation (II.23), à l'identité de réciprocité suivante

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \rho \left[\dot{\mathbf{u}}_1(t)\mathbf{u}_0^2 + \dot{\mathbf{u}}_0^2\mathbf{u}_1(t) - \dot{\mathbf{u}}_0^1\mathbf{u}_2(t) - \dot{\mathbf{u}}_2(t)\mathbf{u}_0^1\right] \, dv \qquad \text{(II.42)} \\ &= \int_\Omega \rho \left(\bar{\mathbf{f}}_1 * \mathbf{u}_2 - \bar{\mathbf{f}}_2 * \mathbf{u}_1\right) \, dv + \int_{\Gamma_n} \left(\bar{\mathbf{t}}_1 * \mathbf{u}_2 - \bar{\mathbf{t}}_2 * \mathbf{u}_1\right) \, ds + \int_{\Gamma_d} \left(\bar{\mathbf{u}}_1 * \boldsymbol{\chi}_2 - \bar{\mathbf{u}}_2 * \boldsymbol{\chi}_1\right) \, ds \end{aligned}$$

L'étoile $*$ représente l'opération de convolution

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau - t) g(\tau) d\tau.$$

∼ ⋆ ∽

Ce chapitre a permis d'obtenir une formulation variationnelle propre à traiter un problème de Dirichlet non homogène. Celle-ci s'avérera utile au moment de se tourner vers la résolution numérique. Nous allons voir maintenant comment résoudre ces équations.

III

Représentation intégrale et formalisme de Green

Il n'est en général pas possible d'obtenir de manière analytique la solution des équations variationnelles du chapitre précédent. Seulement quelques solutions analytiques existent pour des systèmes dont la géométrie et les conditions aux limites imposées sont simples (par exemple, une plaque rectangulaire à bords appuyés).

Dans la plupart des cas, il est nécessaire d'employer des méthodes de calcul numérique. Cependant, avant d'aborder ces méthodes de discrétisation spatiale et temporelle des équations variationnelles, deux solutions particulières de ces équations sont présentées. Elles permettent d'obtenir une formulation intégrale des problèmes élastodynamiques et forment en quelque sorte une base sur laquelle les solutions sont projetées. Les méthodes numériques d'éléments finis et d'éléments de frontière sont alors éclairées par les propriétés de ces fonctions élémentaires.

La première de ces solutions est la solution élémentaire de l'espace infini. Elle engendre une équation intégrale qui est à l'origine des méthodes numériques d'éléments de frontière (section 1). La seconde est le noyau de Poisson, autre solution élémentaire vérifiant des conditions aux limites bien spécifiques sur les frontières du système considéré. L'usage de cette fonction fournit une solution intégrale (section 2). La dernière section présente quelques manières de calculer cette solution élémentaire.

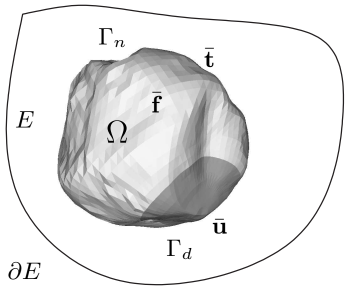


FIG. III.1. **Solide Ω contenu dans un ouvert E** L'application de l'identité de Maxwell-Betty permet de représenter la solution $\mathbf{u}$ du problème $P_{\bar{u}}$ sous la forme intégrale. Le Domaine Ω est limité par une surface $\partial\Omega = \Gamma_n \cup \Gamma_d$ sur laquelle des conditions aux limites $\bar{\mathbf{t}}$ et $\bar{\mathbf{u}}$ sont imposées.

1 REPRÉSENTATIONS INTÉGRALES

Les formules intégrales obtenues par Helmholtz en 1860 pour des ondes acoustiques et par Kirchhoff en 1883 pour des ondes à polarisation transverse sont l'expression du principe de Huygens qui postule que chaque point d'un front d'onde agit comme une source émettant une onde sphérique [11]. Depuis, les formules intégrales du type Helmholtz-Kirchhoff ont été obtenues pour des ondes éléctromagnétiques satisfaisant une équation vectorielle de propagation [12]. Pour les ondes élastiques qui présentent la propriété d'être composées d'ondes longitudinales et transervales se propageant à des vitesses différentes, il a fallu attendre le milieu du XXe siècle pour que Kupradze [13], de Hoop [14] ou encore Wheeler et Sternberg [15], entres autres, généralisent les travaux de Love [16] et obtiennent une formulation intégrale conforme au caractère vectoriel des champs en présence : champ de déplacement, champ de force. Ces formulations intégrales sont à l'origine de nombreux progrès dans la prédiction des phénomènes de propagation d'ondes dans les solides (diffraction, rayonnement, propagation, fracture, etc) quels que soient les matériaux envisagés : isotropes ou anisotropes. Aujourd'hui, avec les performances des ordinateurs, les équations intégrales qui découlent de ce formalisme sont résolues par les techniques numériques d'éléments de frontière. Ces techniques sont analysées et décrites dans de nombreux ouvrages (citons, par exemple, les livres de Bonnet [17] et de Brebbia [18]).

1.1 Formulation intégrale

L'application de l'identité de Maxwell-Betty (II.42) aux problèmes élastodynamiques linéaires, dans un domaine E ouvert contenant[1] Ω, permet de représenter la solution $\mathbf{u}$ du problème $P_{\bar{u}}$ en un point $\mathbf{x} \notin \partial\Omega$ sous la forme intégrale (Ref. [17, 1, 18])

$$\begin{aligned}
\kappa u_k(\mathbf{x},t) &= \int_\Omega \rho G_i^k(\mathbf{x},\mathbf{y};t) * \bar{f}_i(\mathbf{y},t)\, dv_y \\
&+ \int_{\partial\Omega} \left[G_i^k(\mathbf{x},\mathbf{y};t) * \sigma_{ij}(\mathbf{u}) n_j(\mathbf{y},t) - T_i^k(\mathbf{x},\mathbf{y};t) * u_i(\mathbf{y},t)\right] ds_y \\
&+ \int_\Omega \rho \left[\mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \dot{G}_i^k(\mathbf{x},\mathbf{y};t) + \dot{\mathbf{u}}_0(\mathbf{x}) G_i^k(\mathbf{x},\mathbf{y};t)\right] dv_y \\
\text{avec } \kappa &= \begin{cases} 1 & \text{pour } \mathbf{x} \in \Omega \text{ ouvert} \\ 0 & \text{pour } \mathbf{x} \notin \Omega \end{cases}
\end{aligned} \tag{III.1}$$

[1] $\Omega \subseteq E$

Autrement dit, connaissant le champ de force volumique $\bar{\mathbf{f}}$ et les champs, sur la surface $\partial\Omega$, de force surfacique $\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}$ et de déplacement $\mathbf{u}$, il est possible de calculer le champ de déplacement dans le volume Ω à l'aide d'une solution élémentaire $\mathbf{G}$. Cette solution élémentaire, généralement appelée "fonction" de Green (bien qu'il s'agisse ici d'un tenseur dont chaque composante est une fonction), vérifie les propriétés suivantes :

1. Le déplacement $\mathbf{G}^k$ est une solution élémentaire élastodynamique associée à une force unitaire $\mathbf{f}^k$, appliquée dans la direction[2] $\mathbf{e}_k$ en un point fixe $\mathbf{x} \in E$, telle que
$$\rho\mathbf{f}^k(\mathbf{y},t) = \delta(t)\delta(\mathbf{y}-\mathbf{x})\mathbf{e}_k \quad \mathbf{y},\mathbf{x} \in E \tag{III.2}$$

2. Le vecteur déplacement $\mathbf{G}^k(\mathbf{x},\mathbf{y})$ et le tenseur des contraintes élastiques $\boldsymbol{\Sigma}^k(\mathbf{x},\mathbf{y})$ qui lui est associé, sont fonction du point courant $\mathbf{y}$ et de la direction k de la force définie par la définition (III.2), le point $\mathbf{x}$ étant fixé. Les coordonnées cartésiennes $G_i^k(\mathbf{x},\mathbf{y})$ et $\Sigma_{ij}^k(\mathbf{x},\mathbf{y})$ de toute solution élémentaire vérifient la relation fondamentale de la dynamique (III.3), la symétrie des contraintes (III.4) et la loi de comportement linéaire (III.5) (identique à celle du problème $P_{\bar{u}}$ loi de Hooke[3]) :
$$\begin{aligned} \Sigma^k_{ij,j_y}(\mathbf{x},\mathbf{y}) - \rho\ddot{G}^k_i(\mathbf{x},\mathbf{y}) &= -\delta(t)\delta(\mathbf{y}-\mathbf{x})\delta_{ik} && \text{(III.3)}\\ \Sigma^k_{ij}(\mathbf{x},\mathbf{y}) &= \Sigma^k_{ji}(\mathbf{x},\mathbf{y}) && \text{(III.4)}\\ \Sigma^k_{ij}(\mathbf{x},\mathbf{y}) &= C_{ijpq}G^k_{p,q_y}(\mathbf{x},\mathbf{y}) && \text{(III.5)} \end{aligned}$$

3. La notation $\boldsymbol{T}^{\boldsymbol{k}}$, associée à la solution élémentaire $\mathbf{G}^k$, désigne le vecteur contrainte en $\mathbf{y}$, c'est-à-dire la projection du tenseur de contrainte Σ^k_{ij} sur la surface $\partial\Omega$ de normale unitaire sortante $\mathbf{n}$
$$T^k_i(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \Sigma^k_{ij}(\mathbf{x},\mathbf{y})n_j(\mathbf{y}), \quad \mathbf{y} \in \partial\Omega \tag{III.6}$$

4. Il existe autant de solutions élémentaires que de domaines E et de conditions aux limites sur ∂E. Les plus utilisées sont celles de Helmholtz, dans le domaine fréquentiel, ou de Stokes dans le domaine temporel (Ref. [19, 18]). Ce sont des solutions élémentaires de l'espace $E = \mathbb{R}^3$ tout entier, assujetties à la condition de Sommerfeld qui stipule que le flux d'énergie est sortant à l'infini et qu'il n'existe pas de source à l'infini.

1.2 Équation intégrale

Afin d'obtenir une expression explicite de la solution du problème $P_{\bar{u}}$, à l'aide de la représentation intégrale (III.1), il est nécessaire de déterminer, sur la surface $\partial\Omega$, les valeurs du couple $(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}, \mathbf{u})$ qui ne sont pas prescrites par les conditions aux limites. D'après les conditions (II.28) et (II.29) du problème $P_{\bar{u}}$, la force $\boldsymbol{\chi} = -\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}$ qui s'exerce sur la surface de Dirichlet Γ_d et le déplacement $\mathbf{u}$ sur la surface de Neumann Γ_n restent inconnus. Il faut donc trouver une équation intégrale qui permette de les calculer. Or, la relation (III.1) ne vaut *a priori* que pour un point $\mathbf{x}$ à l'intérieur ou à l'extérieur de Ω, c'est-à-dire en dehors de la surface $\partial\Omega$. En effet, les tenseurs mis en jeu peuvent présenter une singularité pour $\mathbf{x} = \mathbf{y}$, et certaines intégrales sur $\partial\Omega$ cessent *a priori* d'avoir un sens pour $\mathbf{x} \in \partial\Omega$. La construction d'une équation intégrale nécessite une procédure de passage à la limite permettant de tenir compte du caractère singulier de la solution élémentaire utilisée. Dans la suite, ce choix porte sur la solution élémentaire de Stokes.

[2] $\mathbf{e}_k$: vecteur unitaire dans la direction k

[3] $f_{,q_y}$ (*resp.* $f_{,q}$) désigne la dérivée partielle de f par rapport à la $q^{\text{ième}}$ coordonnée de $\mathbf{y}$ (*resp.* $\mathbf{x}$).

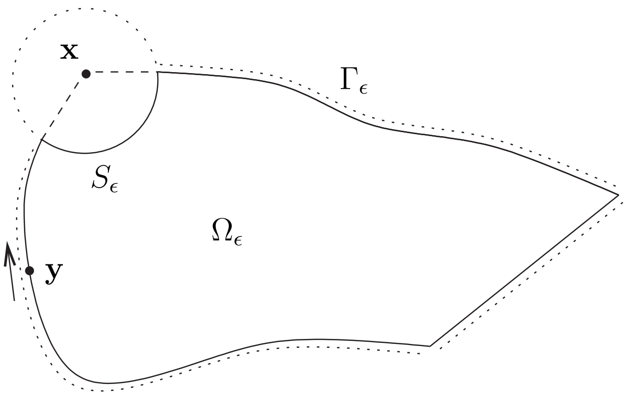


FIG. III.2. **Contour d'intégration** Le domaine Ω_ϵ est construit en privant le domaine Ω de la boule, $B_\epsilon(\mathbf{x})$, de centre $\mathbf{x}$ et de rayon ϵ. La surface $\partial\Omega_\epsilon$ est composée de la réunion des surfaces Γ_ϵ et S_ϵ. Le point $\mathbf{x}$ est volontairement placé à un endroit où la normale est discontinue pour établir un résultat général.

Identité de Somigliana

L'équation intégrale de frontière recherchée est obtenue en utilisant la représentation intégrale (III.1) pour un domaine Ω privé d'une boule de centre $\mathbf{x}$ et de rayon ϵ. Ce qui revient à considérer le contour d'intégration $\partial\Omega_\epsilon$ représenté en figure III.2. Dans ces conditions κ est nul puisque $\mathbf{x}$ est en dehors de Ω_ϵ et l'intégrale de surface sur $\partial\Omega$ devient

$$\int_{\partial\Omega} (\quad)\, ds_y = \lim_{\epsilon\to 0} \int_{\partial\Omega_\epsilon} (\quad)\, ds_y = \lim_{\epsilon\to 0} \left[\int_{\Gamma_\epsilon} (\quad)\, ds_y + \int_{S_\epsilon} (\quad)\, ds_y \right]$$

Les intégrales portant sur Γ_ϵ ne posent pas de problème puisque la singularité $\mathbf{y} = \mathbf{x}$ n'est pas rencontrée. Seule la limite suivante

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int_{S_\epsilon} \left[G_i^k(\mathbf{x},\mathbf{y};t) * \sigma_{ij}(\mathbf{u}) n_j(\mathbf{y},t) - T_i^k(\mathbf{x},\mathbf{y};t) * u_i(\mathbf{y},t) \right] \, ds_y \tag{III.7}$$

doit être calculée avec soin.

Singularités de la solution de Stokes M. Bonnet montre [17] que la solution élémentaire de Stokes présente, à une fonction du temps près, les mêmes singularités en $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ que la solution élémentaire statique de Kelvin. Cette solution, indépendante du temps, vérifie les équations (III.3), (III.4) et (III.5) sans le terme d'inertie $\rho \ddot{G}_i^k$. La solution de Kelvin est invariante par translation puisqu'elle est définie pour l'espace infini homogène. Elle ne dépend donc que de la distance $r = |\mathbf{r}| = |\mathbf{y} - \mathbf{x}|$ entre le point source $\mathbf{x}$ et le point courant $\mathbf{y}$. Puisque le milieu est homogène, elle vérifie de plus

$$G_i^k(\lambda\mathbf{x},\lambda\mathbf{y}) = \lambda^{-1} G_i^k(\mathbf{x},\mathbf{y}), \quad \Sigma_{ij}^k(\lambda\mathbf{x},\lambda\mathbf{y}) = \lambda^{-2} \Sigma_{ij}^k(\mathbf{x},\mathbf{y})$$

La solution de Kelvin présente donc, pour r arbitrairement petit, les singularités suivantes

$$G_i^k(\mathbf{x},\mathbf{y}) = O(\frac{1}{r}), \quad \Sigma_{ij}^k(\mathbf{x},\mathbf{y}) = O(\frac{1}{r^2}),$$

Les parties singulières de la solution élémentaire de Stokes ne diffèrent de celles de la solution de Kelvin qu'au terme $\delta(t)$ près. En allant vite, on écrit

$$G_i^k(\mathbf{x},\mathbf{y};t) = \delta(t).O(\frac{1}{r}), \quad \Sigma_{ij}^k(\mathbf{x},\mathbf{y};t) = \delta(t).O(\frac{1}{r^2}). \tag{III.8}$$

Il est maintenant possible de calculer la limite (III.7). En effet, en remarquant que la distance $|\mathbf{x}-\mathbf{y}|$ vaut ϵ puisque $\mathbf{y} \in S_\epsilon$ et que l'élément de surface $ds_y = \epsilon^2 d\omega(\mathbf{x})$ est proportionnel à l'élément différentiel d'angle solide $d\omega(\mathbf{x})$, il vient

$$\begin{aligned}
\lim_{\epsilon\to 0}\int_{S_\epsilon} G_i^k(\mathbf{x},\mathbf{y};t) * \sigma_{ij}(\mathbf{u})n_j(\mathbf{y},t)\,ds_y &= \sigma_{ij}(\mathbf{u})n_j(\mathbf{x},t)\lim_{\epsilon\to 0}\int_{S_\epsilon} G_i^k(\mathbf{x},\mathbf{y})\epsilon^2 d\omega(\mathbf{x}) = 0 \\
\text{et}\quad \lim_{\epsilon\to 0}\int_{S_\epsilon} T_i^k(\mathbf{x},\mathbf{y};t) * u_i(\mathbf{y},t)\,ds_y &= u_i(\mathbf{x},t)\lim_{\epsilon\to 0}\int_{S_\epsilon} T_i^k(\mathbf{x},\mathbf{y})\epsilon^2 d\omega(\mathbf{x}) \\
&= \frac{\omega(\mathbf{x})}{4\pi}u_k(\mathbf{x},t), \quad \mathbf{x}\in\partial\Omega
\end{aligned}$$

où $\omega(\mathbf{x})$ est l'angle solide[4] sous lequel est vue la surface $\partial\Omega$ du point $\mathbf{x}$. Pour une surface régulière cet angle vaut 2π. La représentation intégrale du champ de déplacement en un point $\mathbf{x}$ de la surface $\partial\Omega$ est alors obtenue en remplaçant ces limites dans la repésentation intégrale (III.1)

$$\begin{aligned}
\frac{\omega(\mathbf{x})}{4\pi}u_k(\mathbf{x},t) &= \int_\Omega \rho G_i^k(\mathbf{x},\mathbf{y};t) * \bar{f}_i(\mathbf{y},t)\,dv_y \\
&+ \int_{\partial\Omega}^{*} \left[G_i^k(\mathbf{x},\mathbf{y};t) * \sigma_{ij}(\mathbf{u})n_j(\mathbf{y},t) - T_i^k(\mathbf{x},\mathbf{y};t) * u_i(\mathbf{y},t)\right]\,ds_y \\
&+ \int_\Omega \rho\left[\mathbf{u}_0(\mathbf{x})\dot{G}_i^k(\mathbf{x},\mathbf{y};t) + \dot{\mathbf{u}}_0(\mathbf{x})G_i^k(\mathbf{x},\mathbf{y};t)\right]\,dv_y
\end{aligned} \tag{III.9}$$

Il faut noter que ce résultat provient de la forme particulière de la surface S_ϵ (calotte sphèrique de la boule, $B_\epsilon(\mathbf{x})$, de centre $\mathbf{x}$ et de rayon ϵ) et fait appel à un type particulier et restrictif de convergence d'intégrales : **la convergence au sens de Cauchy**

$$\int_{\partial\Omega}^{*}(\quad)\,ds_y = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\Gamma_\epsilon}(\quad)\,ds_y, \quad \Omega_\epsilon = \Omega\backslash B_\epsilon(\mathbf{x})$$

Un autre résultat peut être obtenu en choisissant un volume d'exclusion différent de la boule $B_\epsilon(\mathbf{x})$. Ceci montre que le vecteur contrainte T_i^k n'est pas intégrable sur une surface contenant $\mathbf{x}$ et met en lumière une différence importante entre les solutions des équations de l'élasticité (tensorielles) et les solutions d'équations scalaires (équation de Laplace, équation des ondes) pour lesquelles il existe un équivalent intégrable. Marc Bonnet propose une alternative à cette méthode classique en retranchant une identité de corps rigide aux équations intégrales portant sur la surface $\partial\Omega$ avant de procéder au passage à la limite. Il obtient une équation intégrale indépendante du type de convergence des intégrales ce qui facilite la mise en oeuvre numérique [17].

Mise en oeuvre numérique

La résolution de l'équation intégrale (III.9) permet de déterminer les champs de déplacement et de force inconnus sur $\partial\Omega$. La méthode consiste à discrétiser l'équation intégrale prise en un nombre fini de points de collocation $\mathbf{x} = \mathbf{x}_c$ pour fournir autant d'équations que le problème discret compte d'inconnues.

Cette méthode a le désavantage d'être très coûteuse en temps de calcul puisqu'il faut déterminer les champs de contrainte et de déplacement sur toute la surface pour chaque nouveau problème $P_{\bar{u}}$. D'un point de vue pratique, et pour des applications musicales, les conditions aux limites prescrites changent avec le jeu du musicien et il faudrait à chaque fois résoudre une équation intégrale discrétisée du type (III.9).

[4]Dans le cas général, le calcul de l'intégrale $\int_{S_\epsilon} T_i^k(\mathbf{x},\mathbf{y})\epsilon^2 d\omega(\mathbf{x})$ n'est pas aussi trivial et dépend de la forme de la surface évanouissante S_ϵ choisie [17].

2 FORMALISME DE GREEN

L'alternative à la méthode précédente est de trouver une "fonction de Green" propre au domaine Ω qui vérifie des conditions aux limites bien choisies de manière à obtenir, non plus une équation intégrale, mais une solution intégrale. L'examen de la représentation intégrale (III.1) montre que si la fonction de Green est choisie de manière à vérifier, pour tout point source $\mathbf{x}$, les conditions aux limites homogènes sur les surfaces de Dirichlet Γ_d et de Neumann Γ_n

$$G_i^k(\mathbf{x},\mathbf{y};t) = 0, \quad \mathbf{y} \in \Gamma_d, \tag{III.10}$$

$$T_i^k(\mathbf{x},\mathbf{y};t) = 0, \quad \mathbf{y} \in \Gamma_n, \tag{III.11}$$

alors, la solution du problème $P_{\bar{u}}$ peut s'exprimer sous la forme d'une solution intégrale

$$\begin{aligned} \kappa u_k(\mathbf{x},t) &= \int_\Omega \rho G_i^k(\mathbf{x},\mathbf{y};t) * \bar{f}_i(\mathbf{y},t)\,dv_y \\ &+ \int_{\Gamma_n} G_i^k(\mathbf{x},\mathbf{y};t) * \bar{t}_i(\mathbf{y},t)\,ds_y - \int_{\Gamma_d} T_i^k(\mathbf{x},\mathbf{y};t) * \bar{u}_i(\mathbf{y},t)\,ds_y \\ &+ \int_\Omega \rho \left[\mathbf{u}_0(\mathbf{x})\dot{G}_i^k(\mathbf{x},\mathbf{y};t) + \dot{\mathbf{u}}_0(\mathbf{x})G_i^k(\mathbf{x},\mathbf{y};t)\right] dv_y \end{aligned} \tag{III.12}$$

$$\text{avec } \kappa = \begin{cases} 1 & \text{pour } \mathbf{x} \in \Omega \text{ ouvert} \\ 0 & \text{pour } \mathbf{x} \notin \Omega \end{cases}$$

Si cette représentation intégrale présente bien l'avantage de fournir une solution en fonction des données $(\bar{\mathbf{f}}, \bar{\mathbf{t}}, \bar{\mathbf{u}})$, elle pose un problème lorsque les champs de contrainte ou de déplacement inconnus sur la surface $\partial\Omega$ doivent être déterminés. Par exemple, pour calculer le déplacement sur la surface de Neumann Γ_n, il faut pouvoir évaluer la solution intégrale (III.12) pour $\mathbf{x} \in \Gamma_n$ et donc imaginer une fonction de Green pour laquelle une "source impulsionnelle de force" est placée en $\mathbf{x} \in \Gamma_n$. Dans quelle mesure cette exigence est-elle compatible avec la condition à la limite (III.11) qui impose précisément la nullité des forces sur la surface de Neumann ? Les singularités d'une fonction de Green, vérifiant les conditions aux limites (III.10) et (III.11), sont-elles identiques à celles de la solution élémentaire de Stokes (III.8) ? Si elles diffèrent peut-on encore établir une représentation intégrale de surface du type (III.9) où intervient l'angle solide sous lequel la surface $\partial\Omega$ est vue du point $\mathbf{x}$? A ce titre il peut être intéressant de lire le point de vue de Morse et Feshbach [20] qui écrivent une représentation intégrale dans laquelle ce terme n'intervient pas.

2.1 Noyau de Poisson

Pour résoudre ces problèmes, il est nécessaire d'introduire une nouvelle "fonction" qui permettra de lever les paradoxes apparents. Il s'agit du **noyau de Poisson** qui correspond à la réponse du système mécanique lorsqu'il est sollicité par des "sources" impulsionnelles placées indifféremment dans le domaine Ω ou sur la surface $\partial\Omega$.

Définition du noyau de Poisson

Nous devons la dénomination de noyau de Poisson (ou fonction de poisson) à Kozlov, Maz'ya et Rossmann (Ref. [21]) qui ont étudié un problème général aux dérivées partielles défini sur un domaine Ω de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$. Ils considèrent ce problème avec des conditions aux limites données sur la surface $\partial\Omega$ supposée régulière (de classe C^∞). Ils prouvent l'existence et l'unicité de plusieurs solutions élémentaires. Parmi elles, figure le noyau de Poisson pour lequel une distribution de Dirac est la condition à la limite sur la frontière $\partial\Omega$. Enfin, ils donnent une représentation intégrale

de la solution du problème général, avec condition aux limites arbitraires, en fonction de ces solutions élémentaires.

Dans la suite, nous adoptons leur démarche dans l'étude des problèmes élastodynamiques. Par pure convenance, le noyau de Poisson, noté $P^k(\mathbf{x},\mathbf{y};t)$ est, cette fois, une fonction de la variable $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$ correspondant à une source placée en $\mathbf{y} \in \bar{\Omega}$ appliquée dans la direction k ($k = 1, 2, 3$). Ce noyau vérifie donc les équations

- Relation fondamentale de la dynamique, symétrie du tenseur des contraintes et loi de comportement

$$\Sigma^k_{ij,j}(\mathbf{P}) - \rho \ddot{P}^k_i = -\delta(t)\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})\delta_{ik} \qquad \mathbf{x} \in \Omega \qquad \text{(III.13)}$$
$$\Sigma^k_{ij}(\mathbf{P}) = \Sigma^k_{ji}(\mathbf{P}) \qquad \mathbf{x} \in \Omega \qquad \text{(III.14)}$$
$$\Sigma^k_{ij}(\mathbf{P}) = C_{ijpq} P^k_{p,q} \qquad \mathbf{x} \in \Omega \qquad \text{(III.15)}$$

- Conditions aux limites

$$\mathbf{P}^k_i = \delta(t)\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})\delta_{ik} \qquad \mathbf{x} \in \Gamma_d \text{ (Dirichlet)} \qquad \text{(III.16)}$$
$$\Sigma^k_{ij}(\mathbf{P}) n_j = \delta(t)\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})\delta_{ik} \qquad \mathbf{x} \in \Gamma_n \text{ (Neumann)} \qquad \text{(III.17)}$$

- Conditions initiales

$$\mathbf{P}^k_i(\mathbf{x},\mathbf{y};0) = 0 \qquad \mathbf{x} \in \bar{\Omega} \text{ (déplacement initial)} \qquad \text{(III.18)}$$
$$\dot{\mathbf{P}}^k_i(\mathbf{x},\mathbf{y};0) = 0 \qquad \mathbf{x} \in \bar{\Omega} \text{ (vitesse initiale)} \qquad \text{(III.19)}$$

Selon la position du point source $\mathbf{y} \in \bar{\Omega}$, la solution élémentaire de Poisson se décline en trois composantes dont l'interprétation physique est immédiate

1. le point source appartient à l'intérieur du domaine : $\mathbf{y} \in \Omega$. Dans ce cas, le noyau de Poisson correspond au tenseur de Green $\mathbf{G}(\mathbf{x},\mathbf{y};t)$, solution élastodynamique du problème $P_{\bar{u}}$ avec le jeu de données
$$\rho \mathbf{f} = \delta(t)\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})\mathbf{e}_k, \quad \bar{\mathbf{t}} = \bar{\mathbf{u}} = 0 \qquad \text{(III.20)}$$
Il est défini pour $(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in \bar{\Omega} \times \Omega$. La composante G^k_i du tenseur de Green correspond au déplacement du système mécanique, observé en $\mathbf{x}$, selon la direction i, lorsqu'une force impulsionnelle est appliquée en $\mathbf{y}$ à l'intérieur du domaine Ω dans la direction k.
2. le point source appartient à la surface de Neumann : $\mathbf{y} \in \Gamma_n$. Dans ce cas, le noyau de Poisson correspond au tenseur de Neumann $\mathbf{N}(\mathbf{x},\mathbf{y};t)$ défini pour $(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in \bar{\Omega} \times \Gamma_n$. Il représente la réponse en déplacement du système correspondant à l'application d'une force unité concentrée en un point $\mathbf{y}$ de la surface de Neumann, le reste de cette surface étant libre de tout effort, soit mathématiquement
$$\bar{\mathbf{t}} = \delta(t)\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})\mathbf{e}_k, \quad \bar{\mathbf{f}} = \bar{\mathbf{u}} = 0 \qquad \text{(III.21)}$$
3. enfin, si le point source appartient à la surface de Dirichlet : $\mathbf{y} \in \Gamma_d$ le noyau de Poisson prend la forme du tenseur de Dirichlet $\mathbf{D}(\mathbf{x},\mathbf{y};t)$, défini pour $(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in \bar{\Omega} \times \Gamma_d$ avec
$$\bar{\mathbf{u}} = \delta(t)\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})\mathbf{e}_k, \quad \bar{\mathbf{f}} = \bar{\mathbf{t}} = 0 \qquad \text{(III.22)}$$
La composante $\mathbf{D}^k_i(\mathbf{x},\mathbf{y};t)$ du tenseur de Dirichlet est donc la réponse en déplacement du système, observé dans la direction i, lorsqu'un déplacement unité (et non plus une force) est imposé en $\mathbf{y} \in \Gamma_d$ dans la direction k, le reste de la surface de Dirichlet étant fixé.

Représentations intégrales

Dans cette section, à l'aide du noyau de Poisson, les représentations intégrales des déplacements et des contraintes associées à la solution unique du problème $P_{\bar{u}}$ sont établies.

Représentation intégrale du déplacement Par linéarité du système d'équations du problème $P_{\bar{u}}$ vis à vis des données $(\bar{\mathbf{f}}, \bar{\mathbf{t}}, \bar{\mathbf{u}})$ et avec des conditions initiales $(\mathbf{u}_0, \dot{\mathbf{u}}_0)$ nulles, la représentation intégrale du déplacement $\mathbf{u}$ observé dans la direction i est simplement

$$\begin{aligned} u_i(\mathbf{x},t) &= \int_\Omega P_i^k(\mathbf{x},\mathbf{y};t) * \rho \bar{f}_k(\mathbf{y},t)\, dv_{\mathbf{y}} \\ &+ \int_{\Gamma_n} P_i^k(\mathbf{x},\mathbf{y};t) * \bar{t}_k(\mathbf{y},t)\, ds_{\mathbf{y}} + \int_{\Gamma_d} P_i^k(\mathbf{x},\mathbf{y};t) * \bar{u}_k(\mathbf{y},t)\, ds_{\mathbf{y}} \end{aligned} \tag{III.23}$$

Cette représentation intégrale est valable en tout point $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$ et vérifie en particulier la condition de Dirichlet en un point $\mathbf{x} \in \Gamma_d$. En effet, la condition de Dirichlet (III.16) vérifiée par le noyau de Poisson permet d'affirmer que les deux premières intégrales de (III.23) sont nulles et que la dernière donne

$$u_i(\mathbf{x},t) = \int_{\Gamma_d} P_i^k(\mathbf{x},\mathbf{y};t) * \bar{u}_k(\mathbf{y},t)\, ds_{\mathbf{y}} = \int_{\Gamma_d} \delta(t)\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})\delta_{ik} * \bar{u}_k(\mathbf{y},t)\, ds_{\mathbf{y}} = \bar{u}_i(\mathbf{x},t)$$

Ce qui est précisément la condition de Dirichlet (II.28) du problème $P_{\bar{u}}$.

Représentation intégrale des contraintes L'application de la loi de Hooke (II.27) à la représentation intégrale (III.23), compte tenu (III.15), conduit à

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(u)(\mathbf{x},t) &= \int_\Omega \Sigma_{ij}^k(\mathbf{P})(\mathbf{x},\mathbf{y};t) * \rho \bar{f}_k(\mathbf{y},t)\, dv_{\mathbf{y}} \\ &+ \int_{\Gamma_n} \Sigma_{ij}^k(\mathbf{P})(\mathbf{x},\mathbf{y};t) * \bar{t}_k(\mathbf{y},t)\, ds_{\mathbf{y}} + \int_{\Gamma_d} \Sigma_{ij}^k(\mathbf{P})(\mathbf{x},\mathbf{y};t) * \bar{u}_k(\mathbf{y},t)\, ds_{\mathbf{y}} \end{aligned} \tag{III.24}$$

Cette représentation intégrale est valable pour tout point $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$ et vérifie en particulier la condition de Neumann. En effet, compte tenu de la condition de Neumann (III.17) vérifiée par le noyau de Poisson, la projection de la représentation des contraintes (III.24) sur la normale à la surface Γ_n, au point $\mathbf{x} \in \Gamma_n$, donne

$$\sigma_{ij}(u)n_j(\mathbf{x},t) = \int_{\Gamma_n} \Sigma_{ij}^k(\mathbf{P})(\mathbf{x},\mathbf{y};t) * \bar{t}_k(\mathbf{y},t)\, ds_{\mathbf{y}} = \int_{\Gamma_n} \delta(t)\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})\delta_{ik}(\mathbf{x},\mathbf{y};t) * \bar{t}_k(\mathbf{y},t)\, ds_{\mathbf{y}} = \bar{t}_i(\mathbf{x},t)$$

Ce qui est précisemment la condition de Neumann (II.29) du problème $P_{\bar{u}}$.

Concernant la surface de Dirichlet Γ_d la force qui s'y exerce : $\chi_i = -\sigma_{ij}(u)n_j$ est obtenue par projection de (III.24) sur la normale au point $\mathbf{x} \in \Gamma_d$ et donne

$$\begin{aligned} \chi_i(\mathbf{x},t) &= \int_\Omega X_i^k(\mathbf{x},\mathbf{y};t) * \rho \bar{f}_k(\mathbf{y},t)\, dv_{\mathbf{y}} \\ &+ \int_{\Gamma_n} X_i^k(\mathbf{x},\mathbf{y};t) * \bar{t}_k(\mathbf{y},t)\, ds_{\mathbf{y}} + \int_{\Gamma_d} X_i^k(\mathbf{x},\mathbf{y};t) * \bar{u}_k(\mathbf{y},t)\, ds_{\mathbf{y}} \end{aligned} \tag{III.25}$$

où X_i^k est l'opposé du vecteur contrainte associé au noyau de Poisson

$$X_i^k(\mathbf{x},\mathbf{y};t) = -\Sigma_{ij}^k(\mathbf{P})n_j(\mathbf{x},\mathbf{y};t), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_d, \mathbf{y} \in \bar{\Omega}.$$

Cette représentation (III.25) du vecteur contrainte sur la surface de Dirichlet peut aussi être obtenue directement en considérant la linéarité du système d'équations du problème $P_{\bar{u}}$ vis à vis des données $(\bar{\mathbf{f}}, \bar{\mathbf{t}}, \bar{\mathbf{u}})$.

Formulation variationnelle

En utilisant la même méthode que celle utilisée pour traiter le problème $P_{\bar{u}}$, il est possible d'obtenir une formulation variationnelle pour le noyau de Poisson

$$\boldsymbol{\mathcal{P}}^k = (\mathbf{P}^k, \mathbf{X}^k) : (\mathbf{x}, \mathbf{y}; t)) \in \bar{\Omega} \times \bar{\Omega} \times [0, \tau] \longrightarrow (\mathbf{P}^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}; t), \mathbf{X}^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}; t)) \in \mathcal{W}$$

Celui-ci vérifie

$$\begin{aligned}
&\text{trouver } \boldsymbol{\mathcal{P}}^k = (\mathbf{P}^k, \mathbf{X}^k) \in \mathcal{W} \text{ tel que} \\
&\mathrm{m}(\ddot{\boldsymbol{\mathcal{P}}}^k, \boldsymbol{\mathcal{V}}) + \mathrm{k}(\boldsymbol{\mathcal{P}}^k, \boldsymbol{\mathcal{V}}) = \langle \Psi_{\boldsymbol{\mathcal{P}}^k} \,|\, \boldsymbol{\mathcal{V}} \rangle \qquad \forall \boldsymbol{\mathcal{V}} \in \mathcal{W} \\
&\text{avec des conditions initiales nulles}
\end{aligned} \tag{III.26a}$$

Cette formulation utilise la définition suivante

$$\begin{aligned}
\langle \Psi_{\boldsymbol{\mathcal{P}}^k} \,|\, \boldsymbol{\mathcal{V}} \rangle &= \langle \delta(t)\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})\mathbf{e}_k \,|\, \mathbf{v} \rangle_\Omega + \langle \delta(t)\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})\mathbf{e}_k \,|\, \mathbf{v} \rangle_{\Gamma_n} \\
&+ \langle \boldsymbol{\kappa} \,|\, \delta(t)\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})\mathbf{e}_k \rangle_{\Gamma_d}, \quad \forall \boldsymbol{\mathcal{V}} \in \mathcal{W}
\end{aligned} \tag{III.27}$$

La propriété d'unicité du noyau de Poisson s'obtient de la même manière que pour le problème $P_{\bar{u}}$. La question de l'existence est plus problèmatique dans la mesure où les intégrales mises en jeu dans cette formulation variationnelle doivent avoir un sens. L'ensemble $\mathcal{W}$, formé de la composition de l'ensemble de Sobolev $\mathcal{E}$ et de l'ensemble $\mathcal{Z}$, ne contient peut être pas des fonctions suffisamment régulières pour assurer la convergence des intégrales. Il n'est pas question ici de traiter ce problème délicat et nous renvoyons le lecteur aux ouvrages spécialisés sur le sujet [9, 21]. Nous nous contenterons de constater que pour des géométries particulières (espaces semi-infinis par exemple) des solutions analytiques ont été obtenues.

Si l'identité de Maxwell-Betty (II.42) est appliquée au noyau de Poisson (état 1) et à la solution du problème $P_{\bar{u}}$ (état 2), il apparaît, lors du calcul de $\langle \Psi_{\boldsymbol{\mathcal{P}}} \,|\, \boldsymbol{\mathcal{U}} \rangle$, trois termes où figure la distribution de Dirac

$$\int_\Omega \delta(\mathbf{y}-\mathbf{x})\delta_k^i u_k(\mathbf{y},t)\, dv_{\mathbf{y}} + \int_{\Gamma_n} \delta(\mathbf{y}-\mathbf{x})\delta_k^i u_k(\mathbf{y},t)\, ds_{\mathbf{y}} + \int_{\Gamma_d} \delta(\mathbf{y}-\mathbf{x})\delta_k^i \chi_k(\mathbf{y},t)\, ds_{\mathbf{y}}$$

Ceci conduit, selon la position du point $\mathbf{x}$, aux deux représentations intégrales suivantes[5]

1. $\mathbf{x} \in \Omega \cup \Gamma_n$

$$\begin{aligned}
u_i(\mathbf{x},t) &= \int_\Omega P_k^i(\mathbf{y},\mathbf{x};t) * \rho \bar{f}_k(\mathbf{y},t)\, dv_{\mathbf{y}} + \int_{\Gamma_n} P_k^i(\mathbf{y},\mathbf{x};t) * \bar{t}_k(\mathbf{y},t)\, ds_{\mathbf{y}} \\
&+ \int_{\Gamma_d} X_k^i(\mathbf{y},\mathbf{x};t) * \bar{u}_k(\mathbf{y},t)\, ds_{\mathbf{y}} + \int_\Omega \rho \left[\dot{P}_k^i(\mathbf{y},\mathbf{x};t) u_k^0(\mathbf{y}) + P_k^i(\mathbf{y},\mathbf{x};t) \dot{\mathbf{u}}_k^0(\mathbf{y}) \right] dv_{\mathbf{y}}
\end{aligned} \tag{III.28}$$

2. $\mathbf{x} \in \Gamma_d$

$$\begin{aligned}
\chi_i(\mathbf{x},t) &= \int_\Omega P_k^i(\mathbf{y},\mathbf{x};t) * \rho \bar{f}_k(\mathbf{y},t)\, dv_{\mathbf{y}} + \int_{\Gamma_n} P_k^i(\mathbf{y},\mathbf{x};t) * \bar{t}_k(\mathbf{y},t)\, ds_{\mathbf{y}} \\
&+ \int_{\Gamma_d} X_k^i(\mathbf{y},\mathbf{x};t) * \bar{u}_k(\mathbf{y},t)\, ds_{\mathbf{y}} + \int_\Omega \rho \left[\dot{P}_k^i(\mathbf{y},\mathbf{x};t) u_k^0(\mathbf{y}) + P_k^i(\mathbf{y},\mathbf{x};t) \dot{\mathbf{u}}_k^0(\mathbf{y}) \right] dv_{\mathbf{y}}
\end{aligned} \tag{III.29}$$

[5] Les conditions initiales sont maintenant prises en compte.

2.2 Relation de symétrie du noyau de Poisson

Ces dernières représentations intégrales n'ont pas la même forme que les formules (III.23) et (III.25) obtenues grâce aux propriétés de linéarité des équations du mouvement. Ces différences ne sont qu'apparentes et sont levées en considérant les deux noyaux de Poisson $\mathcal{P}^i(\mathbf{x},\mathbf{y};t)$ et $\mathcal{P}^j(\mathbf{x},\mathbf{y}';t)$ dans l'application de la relation de réciprocité de Maxwell-Betty (II.42). D'après la définition (III.27), ce calcul mène au tableau de symétrie (I).

	$\mathbf{y} \in \Omega \cup \Gamma_n$	$\mathbf{y} \in \Gamma_d$
$\mathbf{y}' \in \Omega \cup \Gamma_n$	$P_i^j(\mathbf{y},\mathbf{y}';t) = P_j^i(\mathbf{y}',\mathbf{y};t)$	$X_i^j(\mathbf{y},\mathbf{y}';t) = P_j^i(\mathbf{y}',\mathbf{y};t)$
$\mathbf{y}' \in \Gamma_d$	$P_i^j(\mathbf{y},\mathbf{y}';t) = X_j^i(\mathbf{y}',\mathbf{y};t)$	$X_i^j(\mathbf{y},\mathbf{y}';t) = X_j^i(\mathbf{y}',\mathbf{y};t)$

TAB. I. **Relation de symétrie du noyau de Poisson** La première partie du tableau correspond à la relation classique de symétrie d'un tenseur élémentaire de Green. Les parties hors de la diagonale, expriment une nouvelle relation qui met en regard les tenseurs P_i^j et X_i^j : il y a équivalence entre la réponse en déplacement de la structure, suite à l'application d'un déplacement sur la surface de Dirichlet, et la réponse en force sur cette même surface suite à l'application d'une force au sein de la structure. Il existe donc une relation de symétrie sans dualité entre excitation et réponse.

Ces relations de symétrie permettent de montrer que les formules intégrales (III.23) et (III.25), d'une part, et les formules (III.28) et (III.29), d'autre part, sont bien équivalentes. Puisque la solution $(\mathbf{u},\boldsymbol{\chi})$ est unique, il suffit simplement de rajouter, dans les représentations intégrales (III.23) et (III.25), le terme

$$\int_\Omega \rho \left[\dot{P}_k^i(\mathbf{y},\mathbf{x};t) u_k^0(\mathbf{y}) + P_k^i(\mathbf{y},\mathbf{x};t) \dot{\mathbf{u}}_k^0(\mathbf{y}) \right] dv_{\mathbf{y}}$$

de manière à prendre en compte les conditions aux limites .

3 CALCUL DU NOYAU DE POISSON

La principale difficulté est de calculer le noyau de Poisson. Il existe quelques configurations pour lesquelles le noyau de Poisson a une expression analytique connue. Parmi ces configurations figurent les demi-espaces de $\mathbb{R}^n$ $(n = 1, 2, 3)$. Le calcul du noyau de Poisson est, soit mené directement (souvent en passant dans le domaine de Laplace), soit en utilisant la méthode des images : deux sources sont placées en miroir dans chaque demi-espace et la superposition, somme ou différence, des champs qu'elles créent permet d'obtenir la solution élémentaire recherchée. C'est à travers un exemple très simple, à une dimension, qu'est illustré ci-dessous la méthode des images. Ceci permettra de bien fixer les limites de cette méthode et de faire la part entre fonctions de Green classiques et noyau de Poisson.

La connaissance de solutions élémentaires dans un demi-espace permet aussi d'envisager des géométries plus complexes en utilisant les transformations conformes de coordonnées. Cette méthode, issue de la théorie des fonctions à variables complexes, est applicable aux problèmes bidimensionnels.

Bien qu'élégante, cette méthode ne permet pas d'envisager le calcul du noyau de Poisson pour des configurations géométriques arbitraires. Dans le cas général, et pour des systèmes finis dans l'espace, c'est le formalisme modal que nous avons utilisé et qui est détaillé dans la dernière section.

3.1 Noyau de Poisson pour les demi-espaces

Problème à une dimension

La propagation d'ondes de compression dans une barre de section A est régie, en l'absence de source, par l'équation

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad x \in \Omega \tag{III.30}$$

où E et ρ sont respectivement le module d'Young et la masse volumique du matériau et u est le déplacement longitudinal. Pour rester général, Ω représente une partie de $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{R}$ tout entier s'il s'agit d'une barre infinie).

La solution élémentaire de la barre infinie est bien connue. Elle correspond au champ de déplacement créé en $\mathbf{x}$ par une source impulsionnelle placée en $\mathbf{y}$: c'est-à-dire une source de la forme $\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})\delta(t)$. Cette solution, généralement appelée fonction de Green, s'écrit

$$g(\mathbf{x},\mathbf{y};t) = \frac{1}{2\rho c} Y\left(t - \frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}{c}\right), \quad c = \sqrt{\frac{EA}{\rho}} \tag{III.31}$$

où Y est la fonction de Heaviside. Cette solution vérifie, en outre, la condition de Sommerfeld[6].

Considérons maintenant une barre semi-infinie sollicitée en son extrémité $\mathbf{x} = 0$ par une force impulsionnelle et calculons le noyau de Poisson qui correspond au déplacement $P_N(\mathbf{x}, t)$ de la barre pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^+$. Celui-ci vérifie la condition à la limite de Neumann

$$EA \frac{\partial P_N}{\partial x} = -\delta(t), \quad \text{en } \mathbf{x} = 0$$

En considérant l'équation de propagation (III.30), cette condition à la limite et la condition de Sommerfeld dans le domaine de Laplace, il vient le système d'équations

$$\frac{\partial^2 \bar{P}}{\partial x^2} - \frac{s^2}{c^2}\bar{P} = 0 \qquad \text{dans } \mathbb{R}^+ \tag{III.32a}$$

$$EA \frac{\partial \bar{P}}{\partial x} = -1 \qquad \text{en } x = 0 \tag{III.32b}$$

$$\text{Condition de Sommerfeld pour } x \to +\infty \tag{III.32c}$$

La solution générale de (III.32a) est $\bar{P}(x,s) = ae^{+\frac{s}{c}x} + be^{-\frac{s}{c}x}$. La condition de Sommerfeld impose $a = 0$ et la condition à la limite (III.32b) permet de calculer b pour donner $\bar{P}(x,s) = \frac{1}{\rho c}\frac{e^{-\frac{s}{c}x}}{s}$. L'expression du Noyau de Poisson en fonction du temps est alors obtenue par transformée de Laplace inverse, soit

$$P_N(\mathbf{x},t) = \frac{1}{\rho c} Y\left(t - \frac{\mathbf{x}}{c}\right), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^+, \quad t \in \mathbb{R}^+$$

Le calcul du noyau de Poisson peut aussi se faire en considérant la méthode des images qui consiste à sommer les contributions de deux fonctions de Green de l'espace infini (III.31) dont les sources sont placées symétriquement par rapport à l'origine

$$G_N(\mathbf{x},\mathbf{y};t) = g(\mathbf{x},\mathbf{y};t) + g(\mathbf{x},-\mathbf{y};t),$$

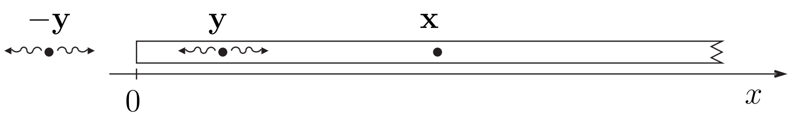


FIG. III.3. **Méthodes des images** Cette méthode consiste à superposer les contributions de deux fonctions de Green de l'espace infini dont les sources sont placées symétriquement par rapport à l'origine.

De par sa construction, cette fonction vérifie une condition de Neumann homogène en $\mathbf{x} = 0$ et coïncide ave le noyau de Poisson pour $\mathbf{y} = 0$ sur le demi axe $\mathbf{x} \in [0, +\infty[$.

Ainsi, il est possible d'utiliser indifféremment la fonction $G_N(\mathbf{x}, \mathbf{y} = 0; t)$ ou $P_N(\mathbf{x}, t)$ dans une formulation intégrale du type (III.23) pour traiter le problème de Neumann inhomogène de la barre semi-infinie. Il n'en va pas de même pour un problème de Dirichlet pour lequel la solution élémentaire du demi-espace est calculée par la méthode des images en faisant la différence (et non plus la somme) de deux fonctions de Green symétriques par rapport à l'origine

$$G_D(\mathbf{x}, \mathbf{y}; t) = g(\mathbf{x}, \mathbf{y}; t) - g(\mathbf{x}, -\mathbf{y}; t),$$

Il est clair que cette fonction est identiquement nulle pour $\mathbf{y} = 0$. Le noyau de Poisson pour le problème de Dirichlet ne peut donc pas se calculer par la méthode des images. Physiquement cela revient à placer une source de *force* à l'origine, précisément là où la barre est fixée. Ce paradoxe n'apparaît pas en utilisant le noyau de Poisson puisqu'il correspond à la réponse de la barre lorsque son extrémité $\mathbf{x} = 0$ subit un *déplacement* impulsionnel. Il est même très facile d'écrire ce noyau de Poisson :

$$P_D(\mathbf{x}, t) = \delta(t - \frac{\mathbf{x}}{c})$$

En effet, cette solution élémentaire vérifie bien dans $\Omega =]0, +\infty[$ l'équation de propagation (III.30) et la condition à la limite

$$P_D(\mathbf{x}, t) = \delta(t), \quad \text{en } \mathbf{x} = 0$$

Bien que la méthode des images soit inadaptée pour traiter les problèmes de Dirichlet, est-il possible de calculer, d'une manière générale, le noyau de Poisson par la méthode des images pour traiter les problèmes de Neumann comme il est montré ci-dessus ? Malheureusement, en élasticité -à cause du caractère vectoriel des champs (déplacements, contraintes)- cette propriété est perdue. A ce titre, déjà en élasticité statique, la solution élémentaire de Mindlin((M. Bonnet p.95 de [17]) du demi-espace de $\mathbb{R}^3$ $E = \{x_1, x_2, x_3, \mid \ x_3 \geq 0\}$ de frontière $\partial E = \{x_3 = 0\}$ ne correspond pas à la superposition des solutions de Kelvin pour des points sources placés symétriquement par rapport au plan ∂E. La solution de Mindlin ne résulte pas de l'application de la méthode des images. La solution de Mindlin est le noyau de Poisson de demi-espace E avec condition de Neumann sur la surface ∂E (surface libre). Elle contient la solution de Boussinesq (force normale pontuelle sur la surface ∂E) et la solution de Cerruti (force de cissaillement ponctuelle sur ∂E).

En élastodynamique, il existe la solution bidimensionelle de Lamb pour le demi-plan de $\mathbb{R}^2$ soumis à une force impulsionnelle sur sa surface, par ailleurs libre de tout effort [22, 19]). Concernant le demi-espace de $\mathbb{R}^3$ les calculs sont menés en effectuant une transformée de Laplace suivie d'une transformée de Hankel. K. F. Graff [23] détaille la procédure de Cagniard qui permet d'obtenir les transformations inverses de Laplace. Il obtient le déplacement à la verticale de la source $r = 0$ et sur la surface $z = 0$ pour une force ponctuelle normale à la surface du demi espace du type

$$F(r, t) = \frac{\delta(r)}{2\pi r} Y(t).$$

[6]La condition de Sommerfeld stipule que le flux d'énergie est sortant à l'infini et qu'il n'existe pas de source à l'infini.

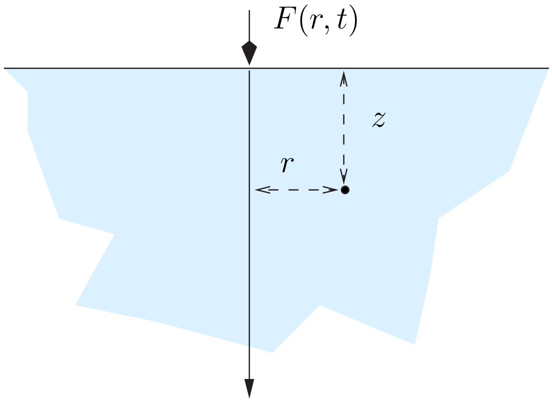


FIG. III.4. **Noyau de Poisson en élastodynamique** Il existe une solution élémentaire pour le demi-espace de $\mathbb{R}^3$ qui correspond à l'application d'une force ponctuelle dans la direction normale à la surface $z = 0$.

3.2 Transformations conformes en dimension deux

La méthode des transformations conformes permet de calculer des solutions élémentaires pour des configurations de géométrie plus complexe. L'idée est de transformer un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$ en un autre ouvert qui ait des symétries plus simples et plus utiles que Ω lui-même. Typiquement le domaine Ω est transformé en le demi-espace supérieur $y \geq 0$ pour lequel des solutions élémentaires analytiques existent. Dans la suite, ce procédé est utilisé pour résoudre l'équation de Poisson où intervient le laplacien et permet de traiter des problèmes hydrodynamiques ou électrostatiques. Nous n'avons pas encore (faute de temps) pû étendre cette démarche aux problémes de l'élasticité mais il nous a parut intéressant de relater ici cette méthode élégante et systématique [24]. Ceci afin de montrer qu'il peut exister des solutions élémentaires pour d'autres configurations que les espaces infinis ou semi infinis.

Définition

Effectuer une transformation conforme de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ c'est trouver un changement de coordonnées $X = P(x,y)$, $Y = Q(x,y)$ qui soit associé à une fonction analytique $f(z)$ définie par $F = P + iQ$. Une fonction $f(z)$ est analytique en $z_0 = x_0 + iy_0$ si sa dérivée au sens complexe $f'(z_0)$ n'est pas nulle. La matrice jacobienne de $f = P + iQ$, soit

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial x} \\ \frac{\partial P}{\partial y} & \frac{\partial Q}{\partial y} \end{pmatrix} \tag{III.33}$$

à la forme d'une similitude directe, c'est-à-dire qu'en posant $\delta x = x - x_0$ et $\delta y = y - y_0$, on a (au premier ordre en $\delta x, \delta y$)

$$\begin{pmatrix} \delta X \\ \delta Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cos\theta & \lambda \sin\theta \\ -\lambda \sin\theta & \lambda \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \end{pmatrix} \tag{III.34}$$

Ce qui donne les conditions de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{\partial P}{\partial y}$$

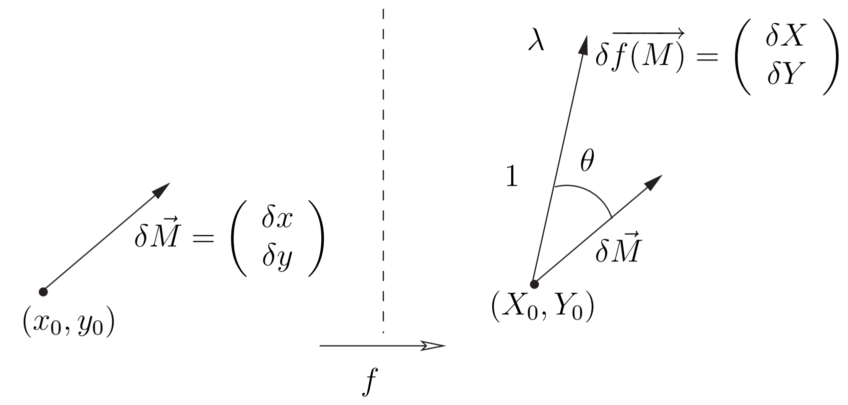


FIG. III.5. **Similitude directe** Similitude directe d'angle θ et de rapport λ.

Ainsi toute fonction analytique ou holomorphe f dans $\Omega \in \mathbb{R}^2$, dont la dérivée ne s'annule pas, est conforme en tout point de Ω. Or, on peut montrer que l'image d'une partie ouverte du plan complexe par une fonction holomorphe non constante est ouverte ; l'image d'un domaine Ω par une fonction holomorphe non constante est donc un domaine $f(\Omega)$. De plus, si f est injective, f définit une bijection de Ω sur $f(\Omega)$ dont l'application réciproque est holomorphe dans $f(\Omega)$; f est alors une *représentation conforme* de Ω sur $f(\Omega)$. Les domaines Ω et $f(\Omega)$ sont dits conformément équivalents, ou encore isomorphes.

Transformation du Laplacien

Soit ϕ une fonction deux fois différentiable et soit f une transformation conforme, représentant Ω sur $f(\Omega)$. Cette fonction f associe à chaque point $\mathbf{x} = (x, y)$ de Ω un point $\mathbf{X} = (X, Y) \in f(\Omega)$. Soit $\Phi(X, Y)$ la fonction définie par

$$\Phi(X, Y) = \phi(x, y), \quad \text{avec} \quad X = P(x, y), \quad Y = Q(x, y)$$

Après quelques calculs, il est possible, en utilisant les conditions de Cauchy-Riemann sur P et Q, de relier les laplaciens des fonctions ϕ et Φ par

$$\Delta_{\mathbf{x}}\phi = |f'(z)|^2 \Delta_{\mathbf{X}}\Phi, \quad \text{avec} \quad f'(z) = \frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} - i\frac{\partial Q}{\partial y} \tag{III.35}$$

Les laplaciens $\Delta_{\mathbf{x}}\phi$ et $\Delta_{\mathbf{X}}\Phi$ sont dans le rapport du carré du facteur de la similitude λ, i.e $|f'(z)|^2 = \det J$

Transformation de la distribution de Dirac

Il est légitime de remplacer $X - X_0$ et $Y - Y_0$ par leurs développements limités au premier ordre en $x - x_0$ et $y - y_0$ dans la distribution de Dirac

$$\delta(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0) = \delta(X - X_0)\delta(Y - Y_0)$$

qui est non nulle seulement dans un "petit" voisinage de 0. Il apparaît alors

$$\delta(\frac{\partial P}{\partial x}\delta x + \frac{\partial P}{\partial y}\delta y)\delta(\frac{\partial Q}{\partial x}\delta x + \frac{\partial Q}{\partial y}\delta y) = \delta(J\delta\mathbf{x})$$

où J est la matrice jacobienne (III.33) et on montre que

$$\delta(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0) = \delta(J\delta\mathbf{x}) = \frac{1}{\det J}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \frac{1}{|f'(z)|^2}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \qquad \text{(III.36)}$$

Application

Cette méthode est appliquée à un système régi par l'équation de Poisson $\Delta\phi = S$, où S est une source (par exemple une charge q si on considère un problème électrostatique). Cherchons l'expression de la fonction de Green définie par

$$\Delta G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \quad \text{dans } \Omega$$

vérifiant en outre une condition de Dirichlet homogène sur le bord $\partial\Omega$. Compte tenu de (III.35) et de (III.36), le problème envisagé dans le domaine $f(\Omega)$, correspondant à la représentation conforme de Ω, s'écrit simplement

$$\begin{aligned} \Delta g_D(\mathbf{X}, \mathbf{X}_0) &= \delta(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0), \quad \text{dans } f(\Omega) \\ g_D(\mathbf{X}, \mathbf{X}_0) &= 0, \quad \text{sur } f(\partial\Omega) \end{aligned}$$

S'il est possible de calculer g_D dans ce nouvel espace $f(\Omega)$, la solution du problème initial est alors obtenue en revenant dans Ω par

$$G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = g_D(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{x}_0))$$

Il faut trouver, par exemple, une fonction $f(z)$ qui transforme Ω en le demi-plan supérieur de $\mathbb{R}^2$.

Exemple

Considérons un demi ruban de hauteur h comme indiqué sur la figure (III.6). Pour calculer G_D, il faut trouver un fonction holomorphe f qui transforme le ruban en un demi-plan. Pour cela, la transformation de Schwartz-Christoffel peut être utilisée. Cette transformation permet de passer d'un demi-plan à un polygone en général. Elle s'appuie sur le fait qu'une fonction $g(z)$ possèdant un point de branchement et une singularité faible en z_0, (d'ordre $\alpha \neq 1$), transforme une droite passant par ce point en deux demi-droites faisant un angle $\alpha\pi$. En appliquant la procédure inverse pour passer du ruban au demi-plan, il est ainsi possible d'obtenir la transformation illustrée en figure (III.6)

$$f(z) = \cosh(\frac{\pi z}{h})$$

La fonction de Green du demi-plan $E = \{x, y \mid y > 0\}$ calculée par la méthode des images est bien connue

$$g_D(\mathbf{X}, \mathbf{X}_0) = -\frac{1}{2\pi}\log\left(\frac{|\mathbf{X} - \mathbf{X}_0|}{|\mathbf{X} - \mathbf{X}_0^\star|}\right), \quad \text{avec} \quad \mathbf{X}_0^\star = \begin{pmatrix} X_0 \\ -Y_0 \end{pmatrix}$$

Puisque le changement de coordonnées induit par $f(z)$ est

$$X = \Re(f(z)) = \cosh(\frac{\pi x}{h})\cos(\frac{\pi y}{h}), \quad Y = \Im(f(z)) = \sinh(\frac{\pi x}{h})\sin(\frac{\pi y}{h})$$

La fonction de Green du ruban est

$$G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = -\frac{1}{4\pi}\log\left[\frac{\left(\cosh(\frac{\pi x}{h})\cos(\frac{\pi y}{h}) - \cosh(\frac{\pi x_0}{h})\cos(\frac{\pi y_0}{h})\right)^2 + \left(\sinh(\frac{\pi x}{h})\sin(\frac{\pi y}{h}) - \sinh(\frac{\pi x_0}{h})\sin(\frac{\pi y_0}{h})\right)^2}{\left(\cosh(\frac{\pi x}{h})\cos(\frac{\pi y}{h}) - \cosh(\frac{\pi x_0}{h})\cos(\frac{\pi y_0}{h})\right)^2 + \left(\sinh(\frac{\pi x}{h})\sin(\frac{\pi y}{h}) + \sinh(\frac{\pi x_0}{h})\sin(\frac{\pi y_0}{h})\right)^2}\right]$$

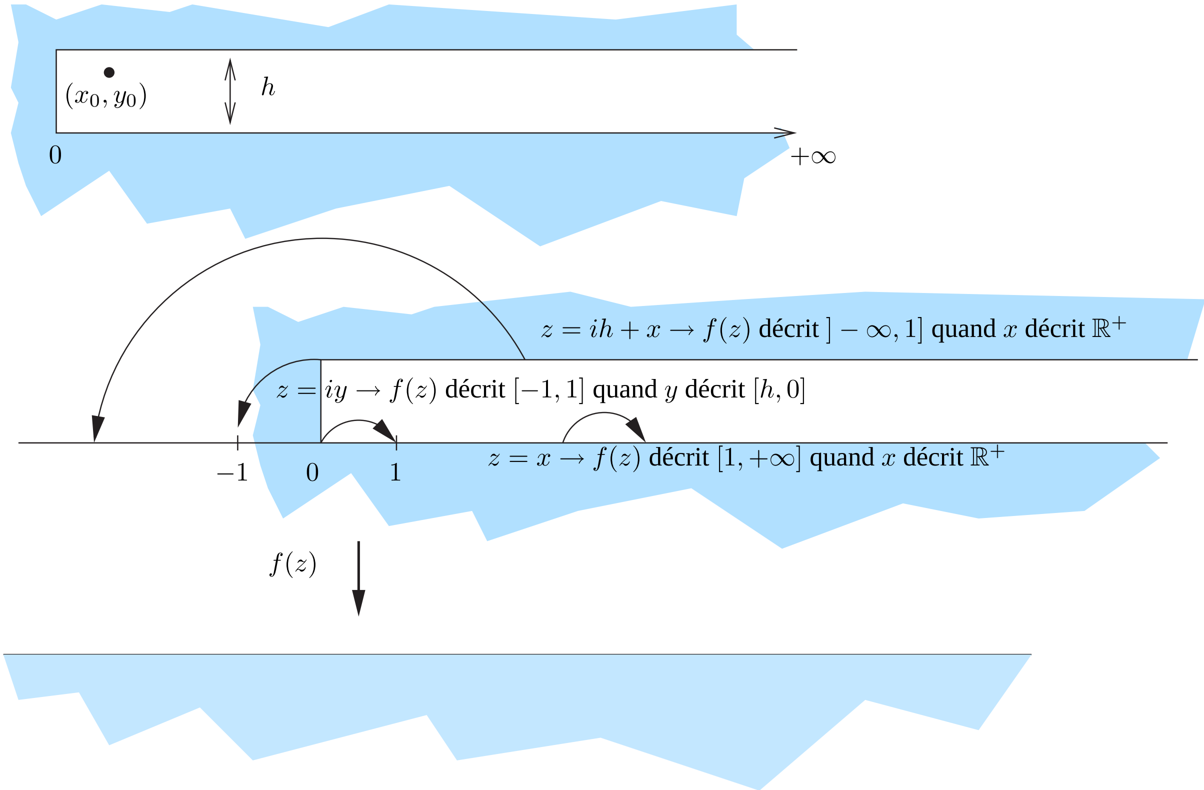


FIG. III.6. **Transformation conforme d'un ruban** La transformation conforme $f(z) = \cosh(\frac{\pi z}{h})$ permet de passer du ruban infini au demi-plan supérieur de $\mathbb{R}^2$ pour lequel une solution analytique existe.

Ce qui n'est pas une formule triviale. Bien sûr, ceci n'est qu'une partie du noyau de Poisson et cette formule ne vaut que pour $\mathbf{x}$ et $\mathbf{x}_0$ à l'intérieur du ruban. Pour connaître totalement le noyau de Poisson du ruban, il faut connaître la solution pour le demi-plan avec une source placée sur la surface $Y = 0$ puis effectuer à nouveau la transformation par $f(z)$.

Cette méthode, bien qu'élégante, ne permet pas d'envisager le calcul du noyau de Poisson pour des configurations géométriques arbitraires. Dans le cas général, et pour des systèmes finis dans l'espace, c'est le formalisme modal que nous avons utilisé et qui est détaillé dans la prochaine section.

3.3 Formalisme modal

La théorie modale s'applique aux systèmes linéaires et permet d'obtenir la solution d'un problème sous la forme d'une combinaison linéaire de fonction propres. Concernant le problème $P_{\bar{u}}$, ces fonctions propres (ou modes propres) vérifient, dans l'espace de Fourier, une formulation variationnelle issue de (II.38) sans second membre

$$\text{Trouver } \mathbf{\Phi} = (\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\xi}) \in \mathcal{W} \text{ tel que}$$
$$\mathrm{k}(\mathbf{\Phi}, \boldsymbol{\mathcal{V}}) - \omega^2 \mathrm{m}(\mathbf{\Phi}, \boldsymbol{\mathcal{V}}) = 0 \qquad \forall \boldsymbol{\mathcal{V}} \in \mathcal{W} \tag{III.37}$$

Le mode propre généralisé $\mathbf{\Phi}^i = (\boldsymbol{\phi}^i, \boldsymbol{\xi}^i)$, associé à la pulsation propre ω_i diffère quelque peu d'un mode classique puisqu'il regroupe non seulement un déplacement $\boldsymbol{\phi}^i$ mais aussi la force $\boldsymbol{\xi}^i$ localisée sur la surface de Dirichlet. La base formée de l'infinité des modes propres généralisés $\mathbf{\Phi} = (\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\xi})$ engendre l'espace vectoriel $\mathcal{W}_0$ des couples $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\chi})$ dont le dépacement $\mathbf{u}$ est nul sur la surface de Dirichlet.

Relation orthogonalité

En appliquant la formulation variationnelle (III.37) au mode $\mathbf{\Phi}^i = (\boldsymbol{\phi}^i, \boldsymbol{\xi}^i)$ dans le champ virtuel $\mathbf{\Phi}^j = (\boldsymbol{\phi}^j, \boldsymbol{\xi}^j)$ et réciproquement, il vient

$$\mathrm{k}(\mathbf{\Phi}^i, \mathbf{\Phi}^j) - \omega_i^2 \mathrm{m}(\mathbf{\Phi}^i, \mathbf{\Phi}^j) = 0$$
$$\mathrm{k}(\mathbf{\Phi}^j, \mathbf{\Phi}^i) - \omega_j^2 \mathrm{m}(\mathbf{\Phi}^j, \mathbf{\Phi}^i) = 0$$

Selon l'usage, en soustrayant ces expressions et en considérant la symétrie des formes $\mathrm{k}(\boldsymbol{\mathcal{U}}, \boldsymbol{\mathcal{V}})$ et $\mathrm{m}(\boldsymbol{\mathcal{U}}, \boldsymbol{\mathcal{V}})$, les relations d'orthogonalité classiques sont obtenues

$$\mathrm{m}(\mathbf{\Phi}^i, \mathbf{\Phi}^j) = m_i \delta_i^j, \quad \mathrm{k}(\mathbf{\Phi}^i, \mathbf{\Phi}^j) = m_i \omega_i^2 \delta_i^j \tag{III.38}$$

Modes propres rigides

Les modes propres rigides $\mathbf{\Phi}_i^\star = (\boldsymbol{\phi}_i^\star, \boldsymbol{\xi}_i^\star)$ sont ceux pour lesquels la pulsation propre ω_i correspondante est nulle. D'après (III.37), ceci conduit à l'équation variationnelle

$$\mathrm{k}(\mathbf{\Phi}, \boldsymbol{\mathcal{V}}) = k(\boldsymbol{\phi}_i^\star, \mathbf{v}) + \langle \boldsymbol{\xi}_i^\star \,|\, \mathbf{v} \rangle_{\Gamma_d} + \langle \boldsymbol{\kappa} \,|\, \boldsymbol{\phi}_i^\star \rangle_{\Gamma_d} = 0, \quad \forall \boldsymbol{\mathcal{V}} = (\mathbf{v}, \boldsymbol{\kappa}) \in \mathcal{W}$$

Prenant successivement $\boldsymbol{\mathcal{V}} = (\boldsymbol{\phi}_i^\star, 0)$ et $\boldsymbol{\mathcal{V}} = (0, \boldsymbol{\xi}_i^\star)$ dans cette équation, il vient

$$k(\boldsymbol{\phi}_i^\star, \boldsymbol{\phi}_i^\star) + \langle \boldsymbol{\xi}_i^\star \,|\, \boldsymbol{\phi}_i^\star \rangle_{\Gamma_d} = 0$$
$$\langle \boldsymbol{\xi}_i^\star \,|\, \boldsymbol{\phi}_i^\star \rangle_{\Gamma_d} = 0$$

Ce qui montre que l'énergie de déformation $k(\boldsymbol{\phi}_i^\star, \boldsymbol{\phi}_i^\star)$ est nulle. Le déplacement $\boldsymbol{\phi}_i^\star$ est donc un mode de déplacement sans déformation. La dérivée spatiale de ce mode est donc nulle en tout point de Ω. Or, le mode $\boldsymbol{\phi}_i^\star$ est nul sur le bord puisque qu'en choisissant $\boldsymbol{\mathcal{V}} = (0, \boldsymbol{\kappa})$ dans (III.15), il vient

$$\langle \boldsymbol{\kappa} \,|\, \boldsymbol{\phi}_i^\star \rangle_{\Gamma_d} = 0, \quad \forall \boldsymbol{\kappa} \in \mathcal{Z} \tag{III.39}$$

Par continuité du champ de déplacement, on en déduit que le mode $\phi_i^\star$ est nul partout(i.e. dans $\bar{\Omega}$ et que, par conséquent, la masse modale $m_i = m(\phi_i^\star, \phi_i^\star)$ qui lui est associée est nulle elle aussi. Physiquement, cela revient à appliquer une force sur une surface rigide d'un solide ne créant ainsi aucune déformation, ni aucun déplacement dans le solide.

Représentation modale du noyau de Poisson

Le noyau de Poisson est projeté sur la base des modes propres généralisés $\mathbf{\Phi}$. Plus exactement, sur la base des modes propres sans les modes rigides. De manière à exclure ces modes, l'ensemble d'indice $N_e = \{p \in \mathbb{N} \mid \omega_p \neq 0\}$ est introduit et le noyau de Poisson s'exprime par

$$\mathcal{P}^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}; t) = \sum_{p \in N_e} \alpha_p(\mathbf{y}, t) \mathbf{\Phi}^p(\mathbf{x})$$

Cette décomposition est remplaçée dans la formulation variationnelle (III.26). Avec le choix judicieux $\mathcal{V} = \mathbf{\Phi}^q$, elle devient

$$\begin{aligned} \langle \Psi_{\mathcal{P}^k} \mid \mathbf{\Phi}^q \rangle &= \mathrm{m}(\sum_{p \in N_e} \ddot{\alpha}_p \mathbf{\Phi}^p, \mathbf{\Phi}^q) + \mathrm{k}(\sum_{p \in N_e} \alpha_p \mathbf{\Phi}^p, \mathbf{\Phi}^q) \\ &= \sum_{p \in N_e} [\ddot{\alpha}_p(\mathbf{y}, t) \mathrm{m}(\mathbf{\Phi}^p, \mathbf{\Phi}^q) + \alpha_p \mathrm{k}(\mathbf{\Phi}^p, \mathbf{\Phi}^q)] \end{aligned}$$

Compte tenu des relations d'orthogonalité (III.38), l'équation différentielle du second ordre en temps

$$m_q \left[\ddot{\alpha}_q(\mathbf{y}, t) + \omega_q^2 \alpha_q(\mathbf{y}, t)\right] = \langle \Psi_{\mathcal{P}^k} \mid \mathbf{\Phi}^q \rangle$$

est obtenue et résolue en utilisant la transformée de Laplace. Les coefficients α_p, vérifient alors

$$\alpha_p(\mathbf{y}, t) = Y(t) \frac{\sin(\omega_p t)}{m_p \omega_p} \left\langle S^k \mid \mathbf{\Phi}^p \right\rangle, \quad p \in N_e$$

où $Y(t)$ est la distribution de Heaviside et $\left\langle S^k \mid \mathbf{\Phi}^p \right\rangle (\mathbf{y})$ est le terme source associé au noyau de Poisson exprimé dans le champ modal $\mathbf{\Phi}^p$

$$\left\langle S^k \mid \mathbf{\Phi}^p \right\rangle (\mathbf{y}) = \langle \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \mathbf{e}_k \mid \boldsymbol{\phi}^p \rangle_\Omega + \langle \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \mathbf{e}_k \mid \boldsymbol{\phi}^p \rangle_{\Gamma_n} + \langle \xi^p \mid \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \mathbf{e}_k \rangle_{\Gamma_d} \tag{III.40}$$

Le noyau de Poisson généralisé $\mathcal{P}^k$ est donc

$$\mathcal{P}^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}; t) = Y(t) \sum_{p \in N_e} \mathbf{\Phi}^p(\mathbf{x}) \frac{\sin(\omega_p t)}{m_p \omega_p} \left\langle S^k \mid \mathbf{\Phi}^p \right\rangle (\mathbf{y}) \tag{III.41}$$

Ce qui donne, d'après (III.40), la composante en déplacement $\mathbf{P}^k$ en un point $\mathbf{x} \in \Omega \cup \Gamma_n$

$$P_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}; t) = Y(t) \sum_{p \in N_e} \frac{\sin(\omega_p t)}{m_p \omega_p} \begin{cases} \phi_i^p(\mathbf{x}) \phi_k^p(\mathbf{y}) & \mathbf{y} \in \Omega \cup \Gamma_n \\ \phi_i^p(\mathbf{x}) \xi_k^p(\mathbf{y}) & \mathbf{y} \in \Gamma_d \end{cases} \tag{III.42}$$

et la composante de force sur la surface de Dirichlet $\mathbf{X}^k$ en un point $\mathbf{x} \in \Gamma_d$

$$X_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}; t) = Y(t) \sum_{p \in N_e} \frac{\sin(\omega_p t)}{m_p \omega_p} \begin{cases} \xi_i^p(\mathbf{x}) \phi_k^p(\mathbf{y}) & \mathbf{y} \in \Omega \cup \Gamma_n \\ \xi_i^p(\mathbf{x}) \xi_k^p(\mathbf{y}) & \mathbf{y} \in \Gamma_d \end{cases} \tag{III.43}$$

Ces résultats sont rassemblés dans le tableau (II). La représentation modale du noyau de Poisson respecte les relations de symétrie données à la table (I).

$\mathcal{P}_i^k(\mathbf{x},\mathbf{y};t)$	$\mathbf{x} \in \Omega \cup \Gamma_n$	$\mathbf{x} \in \Gamma_d$
$\mathbf{y} \in \Omega \cup \Gamma_n$	$P_i^k(\mathbf{x},\mathbf{y};t) = \sum \phi_i^p(\mathbf{x}) h_p(t) \phi_k^p(\mathbf{y})$	$X_i^k(\mathbf{x},\mathbf{y};t) = \sum \xi_i^p(\mathbf{x}) h_p(t) \phi_k^p(\mathbf{y})$
$\mathbf{y} \in \Gamma_d$	$P_i^k(\mathbf{x},\mathbf{y};t) = \sum \phi_i^p(\mathbf{x}) h_p(t) \xi_k^p(\mathbf{y})$	$X_i^k(\mathbf{x},\mathbf{y};t) = \sum \xi_i^p(\mathbf{x}) h_p(t) \xi_k^p(\mathbf{y})$

TAB. II. **Représentation modale du noyau de Poisson** La somme s'étend sur tous les modes propres, à l'exception des modes rigides et la fonction $h_p(t)$ vaut $h_p(t) = Y(t)\frac{\sin(\omega_p t)}{m_p \omega_p}$ où Y est l'échelon de Heaviside. La notation ϕ_i^p désigne le pième mode non rigide observé dans la direction i, et ξ_i^p la ième composante de la force qu'il engendre sur la surface de Dirichlet.

$\sim \star \backsim$

Dans ce chapitre nous avons montré que la solution du problème aux limites $P_{\bar{u}}$ peut se présenter sous la forme d'une solution intégrale où figurent explicitement les conditions aux limites grâce au noyau de Poisson. Cette formulation fournit, sur la surface du solide, les valeurs du couple force-déplacement qui ne sont pas prescrites par les conditions aux limites et permet ainsi de prévoir les rapports d'impédance ou d'admittance.

IV

Méthodes numériques

Jusqu'à présent, le problème a été traité dans le domaine continu. Pour prévoir le comportement dynamique d'un solide de géométrie quelconque soumis à des conditions initiales et des actions extérieures arbitraires, la même démarche que celle utilisée pour les milieux continus peut être mise en oeuvre en se plaçant dans le domaine discret. Dès lors la formulation variationnelle devient un système différentiel linéaire dont l'inversion est rendue possible grâce à la version numérique du noyau de Poisson. La première section de ce chapitre présente la discrétisation des équations variationnelles à l'aide de la méthode des éléments finis. Le calcul du noyau de Poisson par représentation modale fait l'objet de la deuxième section. Enfin, l'expression explicite de la solution du problème aux limites en est déduite dans la dernière section.

1 DISCRÉTISATION DU PROBLÈME $P_{\bar{U}}$

1.1 Méthode des éléments finis

L'équation variationnelle (II.38) est discrétisée par la méthode des éléments finis. Le domaine Ω est représenté par un maillage tridimensionnel d'éléments finis sur lesquels une approximation du déplacement est réalisée grâce à une famille de fonctions d'interpolation polynomiale Λ_α. Ce procédé introduit l'espace $\mathcal{E}_h$ de dimension $N_\mathcal{E}$ en lieu et place de l'espace continu de Sobolev $\mathcal{E}$. Le paramètre h est une caractéristique du maillage : typiquement la dimension du plus grand élément. Ce maillage permet aussi d'obtenir une base d'éléments finis de surface qui donne une approximation de l'espace continu $\mathcal{Z}$ des fonctions définies sur la surface de Dirichlet Γ_d par l'espace

$\mathcal{Z}_h$ de dimension $N_{\mathcal{Z}}$. La famille des fonctions d'interpolation de l'espace $\mathcal{Z}_h$ est notée ζ_α. Le vecteur $\mathcal{U} \in \mathcal{W} = (\mathcal{E} \times \mathcal{Z})$ est approximé par le vecteur $\mathcal{U}_h \in (\mathcal{E}_h \times \mathcal{Z}_h)$ dont la projection sur cette base d'éléments finis est

$$\mathcal{U}_h(\mathbf{x},t) = \begin{cases} u_i = \Lambda_i^\alpha(\mathbf{x})U_\alpha(t) & \alpha = 1,2,\ldots,N_{\mathcal{E}} \\ \chi_i = \zeta_i^a(\mathbf{x})X_a(t) & a = 1,2,\ldots,N_{\mathcal{Z}} \end{cases} \tag{IV.1}$$

L'approximation du vecteur virtuel $\mathcal{V}$ est évidemment

$$\mathcal{V}_h(\mathbf{x}) = \begin{cases} v_i = \Lambda_i^\beta(\mathbf{x})V_\beta & \beta = 1,2,\ldots,N_{\mathcal{E}} \\ \kappa_i = \zeta_i^b(\mathbf{x})Z_b & b = 1,2,\ldots,N_{\mathcal{Z}} \end{cases} \tag{IV.2}$$

Les fonctions d'interpolation des formules (IV.1) ou (IV.2) sont des fonctions d'interpollation li-

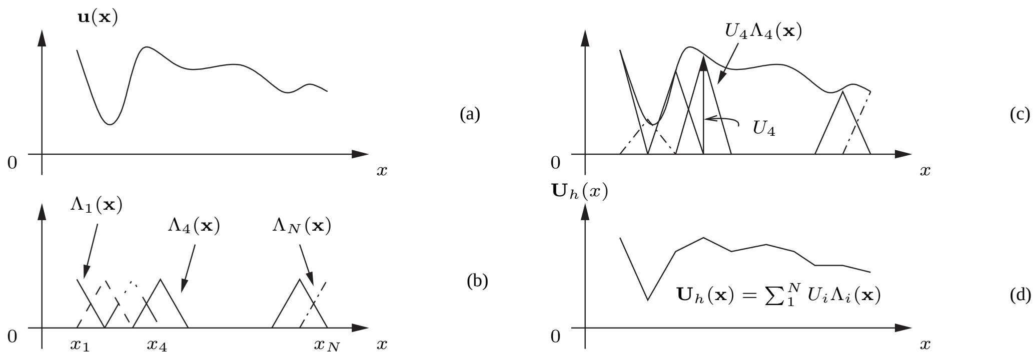


FIG. IV.1. **Interpolation linéaire à une dimension** (a) Champ de déplacement à discrétiser. (b) Fonctions d'interpolation "chapeau". (c) Projection sur la base d'élément finis. (d) Résultat obtenu.

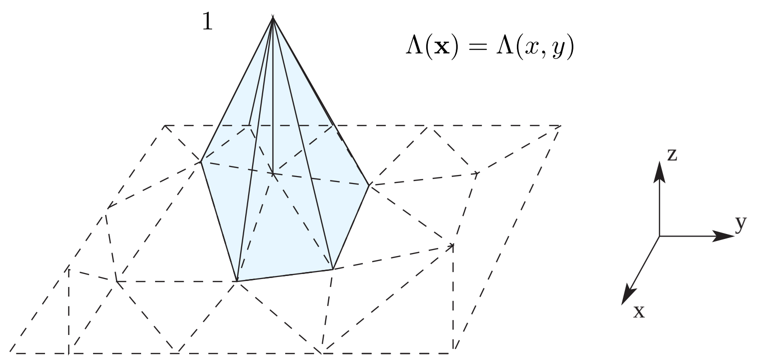


FIG. IV.2. **Fonction d'interpolation linéaire en dimension deux** Une fonction d'interpolation est associée à un noeud du réseau pour lequel elle prend la valeur 1. Cette fonction est nulle pour toute maille ne contenant pas le noeud considéré.

néaire ou fonction "chapeau". Difficilement représentable en dimension trois, l'allure de ces fonctions est tracée dans le cas uni et bidimensionnel (Fig. IV.1 et IV.2 respectivement). Chaque fonction est associée à un noeud du réseau pour lequel elle prend la valeur 1. Cette fonction est nulle pour toute maille ne contenant pas le noeud considéré.

1.2 Equations du mouvement dans le domaine discret

Système linéaire différentiel

Ces expressions permettent d'obtenir une version discrète de l'équation variationnelle (II.38)

$$V_\beta \left(\mathbb{M}_{\beta\alpha}\ddot{U}_\alpha + \mathbb{K}_{\beta\alpha}U_\alpha + X_a\mathbb{C}_{a\beta} - \bar{F}_\beta\right) = Z_b\left(\mathbb{C}_{b\alpha}U_\alpha - \bar{U}_b\right), \qquad \forall (V_\beta, Z_b) \in (\mathcal{E}_h \times \mathcal{Z}_h) \tag{IV.3}$$

pour laquelle les éléments de matrices de masse, de raideur et de contrainte de Dirichlet sont respectivement

$$\mathbb{M}_{\beta\alpha} = m(\mathbf{\Lambda}^\alpha, \mathbf{\Lambda}^\beta) = \int_\Omega \rho \Lambda_i^\alpha \Lambda_i^\beta \, dv \tag{IV.4}$$

$$\mathbb{K}_{\beta\alpha} = k(\mathbf{\Lambda}^\alpha, \mathbf{\Lambda}^\beta) = \int_\Omega C_{ijkl} \Lambda_{k,l}^\alpha \Lambda_{i,j}^\beta \, dv \tag{IV.5}$$

$$\mathbb{C}_{b\alpha} = \left\langle \boldsymbol{\zeta}^b \,|\, \mathbf{\Lambda}^\alpha \right\rangle_{\Gamma_d} = \int_{\Gamma_d} \zeta_i^b \Lambda_i^\alpha \, ds \tag{IV.6}$$

Les composantes des vecteurs $\bar{F}$ et $\bar{U}$ étant

$$\bar{F}_\beta = \left\langle \psi(t) \,|\, \mathbf{\Lambda}^\beta \right\rangle = \int_\Omega \rho \bar{f}_i \Lambda_i^\beta \, dv + \int_{\Gamma_n} \bar{t}_i \Lambda_i^\beta \, ds \tag{IV.7}$$

$$\bar{U}_b = \left\langle \boldsymbol{\zeta}^b \,|\, \bar{u} \right\rangle_{\Gamma_d} = \int_{\Gamma_d} \zeta_i^b \bar{u}_i \, ds \tag{IV.8}$$

Prenant successivement $\mathbf{V} = 0$ puis $\mathbf{Z} = 0$ dans (IV.3), le système différentiel linéaire suivant est obtenu

$$\begin{bmatrix} \mathbb{K} & \mathbb{C}^t \\ \mathbb{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{X} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbb{M} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{U}} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{F}} \\ \bar{\mathbf{U}} \end{pmatrix} \tag{IV.9}$$

Les fonctions d'interpolation globale $\mathbf{\Lambda}$ et $\boldsymbol{\zeta}$, définissant une base d'éléments finis, sont employées ici pour représenter les champs d'un point de vue formel. Dans la pratique, le calcul des fonctions d'interpolations $\mathbf{\Lambda}$ et $\boldsymbol{\zeta}$ n'est pas nécessaire inutil. Il est préférable de calculer les matrices (IV.4)-(IV.6) et les vecteurs (IV.7)-(IV.8) par l'intermédiaire de quantités portant sur chaque élément fini puis d'assembler les résultats afin d'obtenir le système d'équations (IV.9) qui régit toute la structure. Les fonctions d'interpolation sont alors définies par élément. La méthode des éléments finis est abondemment traitée dans la littérature. Pour plus de détails, le lecteur peut se reporter aux ouvrages généraux [25, 26]. Nous avons développé au laboratoire un embryon de code informatique utilisant la méthode des éléments finis. Plus précisément, les algorithmes de calcul des matrices $\mathbb{M}$, $\mathbb{K}$ et $\mathbb{C}$ ont été implémentés, à partir de la présentation de J. F. Imbert [27], pour l'élément isoparamétrique $CU8$. L'élément $CU8$ est un hexaèdre à 8 sommets dont les fonctions d'interpolation sont linéaires. L'intégration est réalisée numériquement en utilisant la méthode des points de Gauss. Ce code a aussi été ajouté au logiciel de synthèse sonore *Modalys*.

Résolution par différences finies

Le système (IV.9) peut être résolu directement en employant des techniques de calcul par différences finies. Le domaine temporel $[0, \tau]$ est découpé en M periodes de durée ΔT telles que $0 = t_0 \leq t_1 \leq t_2 \ldots \leq t_M = \tau$, avec $t_{n+1} - t_n = \Delta T$. La dérivée seconde $\ddot{\mathbf{U}}(t)$ intervenant dans le système différentiel (IV.9) est alors exprimée au temps discret $t = n\Delta T$ en fonction des valeurs de la fonction $\mathbf{U}(t)$ aux temps $n\Delta T, (n-1)\Delta T, \ldots, (n-i)\Delta T$. Selon l'ordre i du schéma

retenu et la pondération des événements, cette dérivée est plus ou moins précise et donc plus ou moins coûteuse du point de vue numérique.

Il n'est pas question ici de décrire davantage ces techniques dans la mesure où elles produisent *in fine* un système linéaire à chaque pas de temps discret. Dans la pratique, le nombre de degré de liberté peut être très important. Les machines actuelles ne permettent pas d'inverser en temps réel de gros systèmes linéaires (ou de se rapprocher du temps réel). Pour des applications musicales, il est préférable de partitionner les calculs en deux phases. Les fonctions de base qui dépendent uniquement de la structure sont tout d'abord déterminées (modes de résonance, noyau de Poisson). Le calcul du comportement dynamique correspondant à des conditions particulières d'utilisation vient ensuite. Des exemples sonores seront présentés lors de la soutenance.

2 CALCUL DU NOYAU DE POISSON PAR REPRÉSENTATION MODALE

2.1 Calcul numérique des modes propres de vibration

Les valeurs propres et les vecteurs propres de la structure discrétisée par éléments finis sont calculées en résolvant le système classique

$$\mathbb{A}\Phi = \omega^2 \mathbb{B}\Phi \tag{IV.10}$$

obtenu en prenant, soit la transformée de Fourier de (IV.9), soit en discrétisant la formulation variationnelle (III.37). Les matrices $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ valent

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} \mathbb{K} & \mathbb{C}^t \\ \mathbb{C} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{B} = \begin{bmatrix} \mathbb{M} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{IV.11}$$

Pour des grands systèmes où le nombre de degrés de liberté dépassent quelques centaines, il est difficile d'obtenir l'ensemble des valeurs propres et vecteurs propres. Du point de vue numérique, le calcul des modes propres se fait par méthode itérative. Après quelques manipulations simples, le système (IV.10) peut être remplacé par le système plus classique encore

$$\mathbb{D}\mathbf{Y} = \lambda\mathbf{Y}, \quad \lambda = \frac{1}{\omega^2}$$

où selon la technique utilisée la matrice $\mathbb{D}$ vaut

$$\mathbb{D} = \mathbb{A}^{-1}\mathbb{B}, \quad \text{ou} \quad \mathbb{D} = \mathbb{U}\mathbb{A}^{-1}\mathbb{U}^t$$

La matrice $\mathbb{U}$ est la factorisation de Cholesky de la matrice $\mathbb{B}$. La solution par itération du problème $\mathbb{D}\mathbf{Y} = \lambda\mathbf{Y}$ est obtenue en formant les itérés successifs $\mathbf{z}_p$ d'un vecteur de départ $\mathbf{z}_0$ arbitraire par la relation

$$\begin{cases} \mathbf{z}^*_{p+1} = \mathbb{D}\mathbf{z}_p \\ \mathbf{z}_{p+1} = \frac{\mathbf{z}^*_{p+1}}{||\mathbf{z}_{p+1}||} \end{cases} \tag{IV.12}$$

Il est montré [28, 27] que cet algorithme de la puissance directe converge vers le mode propre ayant la valeur propre λ la plus élevée (la pulsation ω la plus basse). Pour obtenir, les modes de pulsations plus élevées, le procédé de déflation orthogonale est utilisé. Supposant p premiers vecteurs calculés, chaque nouveau vecteur propre est obtenu par un procédé itératif du type (IV.12). A chaque nouvelle itération, l'itéré est projeté sur l'espace orthogonal aux p premiers vecteurs.

Ce type d'algorithme fournit la base de méthodes plus sophistiquées qui font l'objet d'études mathématiques très poussées. Puisque ces méthodes ne sont pas à proprement parler le sujet de cette thèse, nous nous contentons, du point de vue pratique, d'utiliser les algorithmes existants dans la plupart des codes d'éléments finis. Les sources informatiques du code "aster" d'EDF sont accessibles

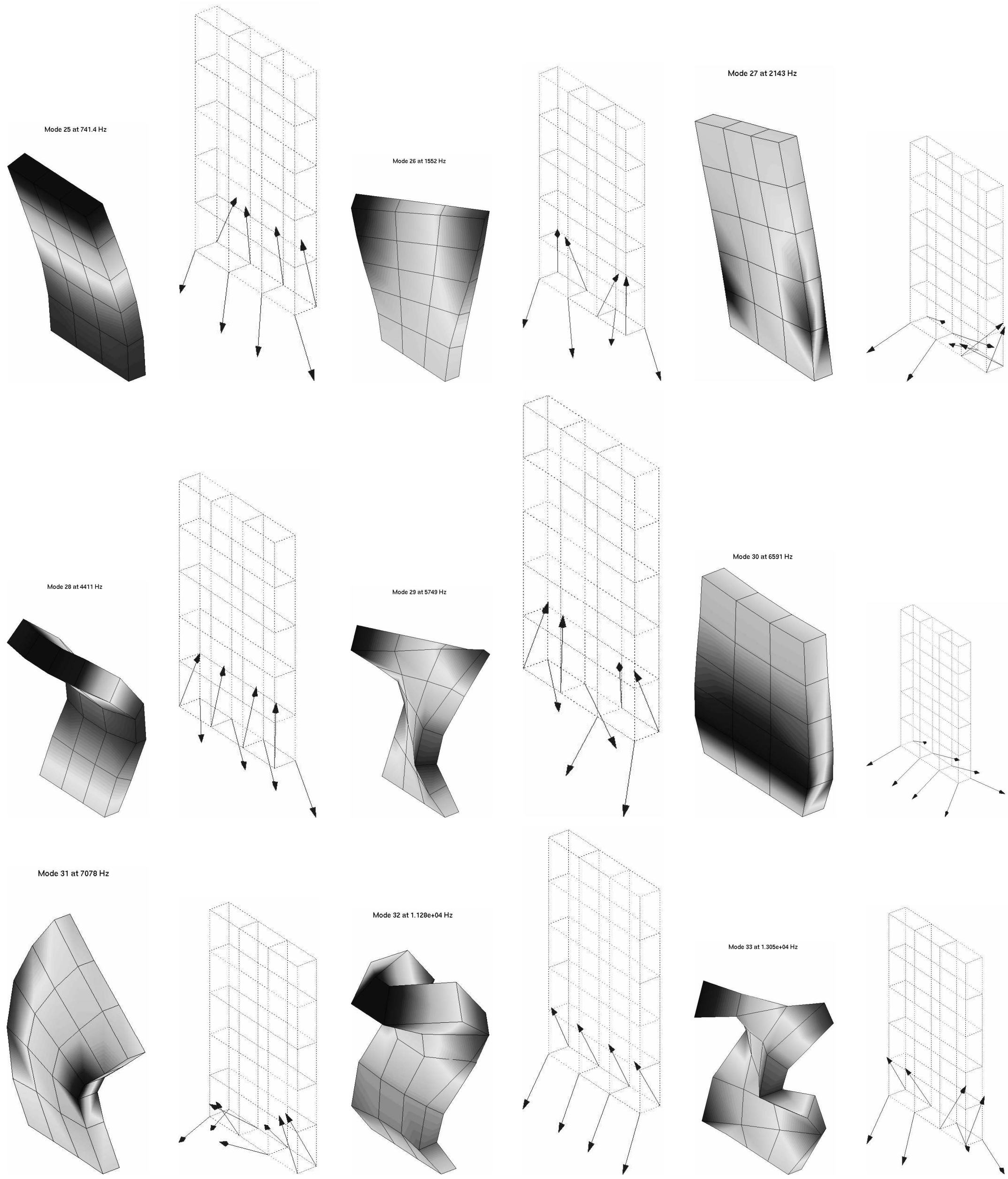


FIG. IV.3. **Modes généralisés** Neuf premières déformées modales d'une barre fixée sur le sol. Les fléches représentent les forces qui s'exercent sur la surface de Dirichlet (ici le sol).

sur internet et présentent l'avantage d'avoir été testées et validées. Les "routines" de diagonalisation de matrices écrites en Fortran et fondées sur la méthode d'Arnoldi [29, 30, 31, 32, 33] ont été implémentées dans le code d'élément finis de notre laboratoire. La figure (IV.3) présente le résultat d'un calcul de modes propres pour une plaque fixée sur le sol obtenu avec le code du laboratoire. Pour chaque mode $\mathbf{\Phi}$ la déformée modale $\boldsymbol{\phi}$ est tracée ainsi que le vecteur force $\boldsymbol{\xi}$ correspondant.

Au terme de ces calculs, on dispose de valeurs approchées des pulsations propres et vecteurs propres d'un système. Il est clair que la précision des calculs augmente avec le nombre d'éléments finis utilisés dans le maillage. Pour obtenir des résultats satisfaisants, il est conseillé de discrétiser une longueur d'onde par plusieurs éléments finis (une dizaine en pratique). Ceci fixe une limite supérieure à la taille des éléments finis pour traiter un problème dans une plage de fréquence donnée. La méthode des éléments finis donne donc de meilleurs résultats en basse fréquence. Ceci est principalement dû au fait que les fonctions d'interpolation sont des polynômes. Babuska et Melenk [34] ont imaginé des fonctions d'interpolation construites à partir de trains d'ondes. Dans certains cas, la précision des calculs dynamiques devient indépendante du nombre d'éléments choisi. Ils montrent qu'il peuvent obtenir, dans les autres cas, des précisions de calcul nettement meilleures que celles des méthodes traditionnelles pour une densité donnée d'éléments [35].

2.2 Version numérique du noyau de Poisson par représentation modale

Connaissant les modes propres numériques d'une structure maillée par éléments finis, une matrice représentant le noyau de Poisson peut être calculée. Avant de donner l'expression de cette matrice, il est nécessaire de mieux caratériser la base modale constituée de l'ensemble des modes Φ vérifiant (IV.10). Les matrices $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ de taille $N_{\mathcal{E}} + N_{\mathcal{Z}}$ semblent suggérer que l'espace vectoriel sur lequel on cherche une base diagonale est de dimension $N_{\mathcal{E}} + N_{\mathcal{Z}}$. En fait, il existe deux contraintes qui réduisent la dimension de l'espace à $N_{\mathcal{E}} - N_{\mathcal{Z}}$. La première contrainte est évidemment celle de Dirichlet qui annule $N_{\mathcal{Z}}$ composantes du déplacement de chaque mode. La deuxième contrainte est la loi de Hooke qui relie la variation spatiale du déplacement à la force de Dirichlet. Ce qui fait $N_{\mathcal{Z}}$ contraintes supplémentaires. Dans la pratique, comment écarter $2N_{\mathcal{Z}}$ modes de la base modale ? Tout d'abord, il convient de supprimer les modes rigides : ceux dont la pulsation propre est nulle. Ensuite, il faut mettre à l'écart les modes qui ne vérifient pas la condition de Dirichlet et qui sont pourtant générés par l'algorithme itératif par déflation orthogonale. La base modale est donc représentée par une matrice de $N_{\mathcal{E}} - N_{\mathcal{Z}}$ modes rangés en colonnes successives[1]

$$[\Phi] = \{\Phi^1, \Phi^2, \dots, \Phi^{N_{\mathcal{E}} - N_{\mathcal{Z}}}\}. \tag{IV.13}$$

Dans ces conditions et d'après la formule (III.41), la version numérique du noyau de Poisson s'écrit

$$\mathbb{P}(t) = [\Phi] \begin{bmatrix} \ddots & & 0 \\ & Y(t)\frac{\sin(\omega_i t)}{m_i \omega_i} & \\ 0 & & \ddots \end{bmatrix} [\Phi]^t \tag{IV.14}$$

L'allure de la matrice du noyau de Poisson est donnée à la figure (IV.4). Chaque élément de matrice $\mathbb{P}_{ij}(t)$ est une fonction du temps. L'indice i renvoie au point d'observation et l'indice j au point d'application de la source impulsionnelle. Pour décrire les situations qui peuvent se présenter les indices sont ordonnés en plusieurs ensembles

1. soit $N_{\Omega \cup \Gamma_n}$ l'ensemble des indices correspondant au déplacement d'un noeud situé à l'intérieur du solide ou sur la surface de Neumann. Si l'indice i appartient à cet ensemble, l'observation est un déplacement, si j en fait partie, l'excitation est une force.

[1] Chaque colonne de dimension $N_{\mathcal{E}} + N_{\mathcal{Z}}$ comporte $N_{\mathcal{Z}}$ composantes nulles (déplacement nul sur la surface de Dirichlet).

2. soit N_{χ_D} l'ensemble des indices décrivant une force s'appliquant sur la surface de Dirichlet : si i y appartient l'observation est une force, si j en fait partie, l'excitation est un déplacement.
3. enfin, soit N_{Γ_d} l'ensemble des indices correspondant au déplacement d'un noeud situé sur la surface de Dirichlet. Dans ce cas la fonction de Poisson $\mathbb{P}_{ij}(t)$ n'a pas besoin d'être calculée puisqu'elle correspond théoriquement à une distribution de Dirac. Voila pourquoi les lignes et les colonnes correspondantes (par ailleurs nulles) ont été retirées du schéma de la figure (IV.4).

3 EXPRESSION DE LA SOLUTION NUMÉRIQUE DU PROBLÈME $P_{\bar{U}}$

3.1 Solution numérique

D'après les formules de représentation intégrale (III.23) et (III.25) exprimées dans le domaine continu, il est maintenant possible d'écrire la solution du problème $P_{\bar{u}}$ dans le domaine discret sous la forme d'une convolution [36]

$$\begin{pmatrix} \mathbf{U}(t) \\ \mathbf{X}(t) \end{pmatrix} = \mathbb{P}(t) * \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{F}}(t) \\ \bar{\mathbf{U}}(t) \end{pmatrix} \tag{IV.15}$$

où la "matrice" $\mathbb{P}$ est donnée par (IV.14). Cette matrice correspond, en fait, à l'inverse de convolution de l'opérateur

$$\begin{bmatrix} \mathbb{K} & \mathbb{C}^t \\ \mathbb{C} & 0 \end{bmatrix} \delta(t) + \begin{bmatrix} \mathbb{M} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \ddot{\delta}(t)$$

intervenant dans le système différentiel linéaire (IV.9). Il existe donc une relation entre le formalisme intégral du noyau de Poisson et les techniques numériques de résolution de problèmes aux dérivées partielles par la méthode des éléments finis puisque ces techniques consistent après discrétisation des équations du mouvement à inverser un système linéaire. Il est possible de dire que le noyau de Poisson est à la méthode des éléments finis ce que la fonction de Green de l'espace infini est à la méthode des éléments de frontière décrite au chapitre III § 1.2. En effet, ces deux solutions élémentaires fournissent des méthodes numériques qui permettent par inversion de résoudre des problèmes aux dérivées partielles.

La solution numérique (IV.15) n'est pas tout à fait complète. Si la matrice de Poisson est calculée par représentation modale, le résultat de la convolution (IV.15) donne un déplacement nul sur la surface de Dirichlet. Puisque ce déplacement $\bar{\mathbf{U}}$ est connu par hypothèse, il suffit de le rajouter à la solution.

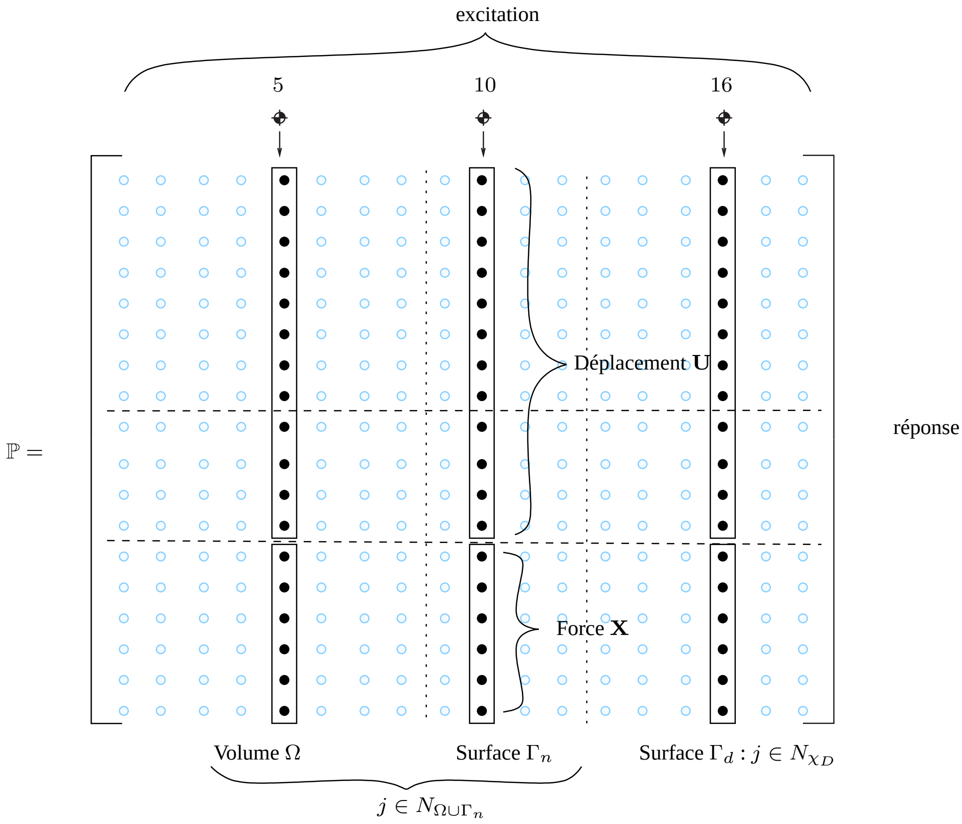
Pour des applications musicales, la formulation (IV.15) est particulièrement intéressante dans la mesure où elle découple les aspects qui dépendent du solide de ceux qui dépendent des actions extérieures. Le calcul du noyau de Poisson $\mathbb{P}$ ne dépend que du solide, c'est-à-dire de sa géométrie et de sa constitution matérielle. Les actions extérieures (en pratique le jeu du musicien) sont prises en compte par le vecteur

$$\begin{pmatrix} \bar{\mathbf{F}}(t) \\ \bar{\mathbf{U}}(t) \end{pmatrix}$$

La synthèse sonore est donc divisée en deux phases : la phase de conception d'un instrument (la lutherie virtuelle à travers le calcul du Noyau de Poisson) et la phase de jeu musical par le calcul de la convolution (IV.15).

3.2 Prise en compte des effets visqueux

Par souci de simplicité les phénomènes visqueux ont d'abord été écartés de la modélisation. Il est pourtant possible de prendre en compte ces phénomènes en utilisant, selon le modèle retenu, les



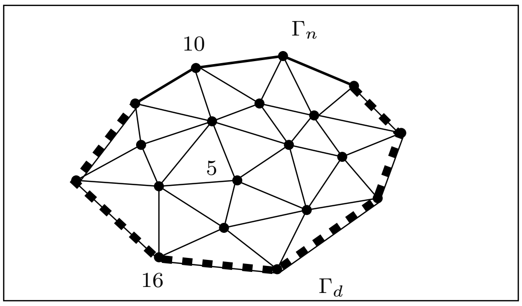


FIG. IV.4. **Matrice de Green ou de Poisson** Chaque élément de matrice $\mathbb{P}_{ij}$ est une fonction du temps. Chaque colonne représente le déplacement du solide et la force de réaction sur la surface de Dirichlet. Cette réponse du système est due à une excitation imposée au noeud correspondant. La colonne 10, par exemple, décrit les champs qui règnent dans la structure lorsque une force est appliquée au noeud 10. Le type d'excitation (force ou déplacement) dépend du noeud considéré : le noeud 16 est placé sur la surface de Dirichlet, la colonne 16 représente donc la réponse du solide lorsqu'un déplacement (et non pas une force) est imposée à ce noeud.

lois de comportement (I.60) ou (I.61). Dans le domaine discret la prise en compte des effets visqueux se traduit par la présence, dans les équations du mouvement, d'une matrice d'amortissement $\mathbb{D}$. En sa présence, les valeurs propres et les vecteurs propres du système ne sont plus réels mais complexes. La partie imaginaire des pulsations propres représente l'amortissement du mode correspondant. L'annexe D montre comment prendre en compte ces modes complexes dans le calcul du Noyau de Poisson.

∼ ⋆ ∽

Au terme de ce chapitre, une solution numérique du problème $P_{\bar{u}}$ avec conditions aux limites arbitraires a été obtenue et ce pour des configurations géométriques quelconques. Le calcul numérique du noyau de Poisson par représentation modale présente l'avantage d'être systématique[2].

[2] Le calcul numérique du noyau de Poisson peut néanmoins être envisagé avec d'autres techniques numériques (par exemple la méthode des éléments de frontière)

V

Vibrations d'une structure précontrainte

Jusqu'à présent, nous nous sommes intéressés à l'étude dynamique d'une structure subissant de petites déformations par rapport à sa configuration non déformée. La linéarisation des équations du mouvement suffisait pour modéliser les propriétés de vibration du système étudié. Cependant ce modèle ne peut rendre compte des propriétés dynamiques d'un corps ayant subi une grande déformation initiale. Selon cette formulation, les fréquences propres seront les mêmes que le système soit précontraint ou non, ce qui est paraît aller contre l'intuition. Pour décrire convenablement le comportement dynamique d'une telle structure, il faut partir des équations non linéaires issues de la théorie de la mécanique des milieux continus et par la suite linéariser ces équations au voisinage de l'état statique précontraint.

1 SYSTÈMES DE COORDONNÉES ET ÉQUATIONS FONDAMENTALES

1.1 Description du problème

Solide au repos

Un solide élastique au repos est dans son **état naturel ou matériel non déformé**. Il occupe une région de l'espace R_0, de volume Ω_0, de surface $\partial\Omega_0$ et de masse volumique ρ_0. La position d'un point matériel P est décrit par un système de coordonnées cartésiennes X_1, X_2, X_3 (ou simplement

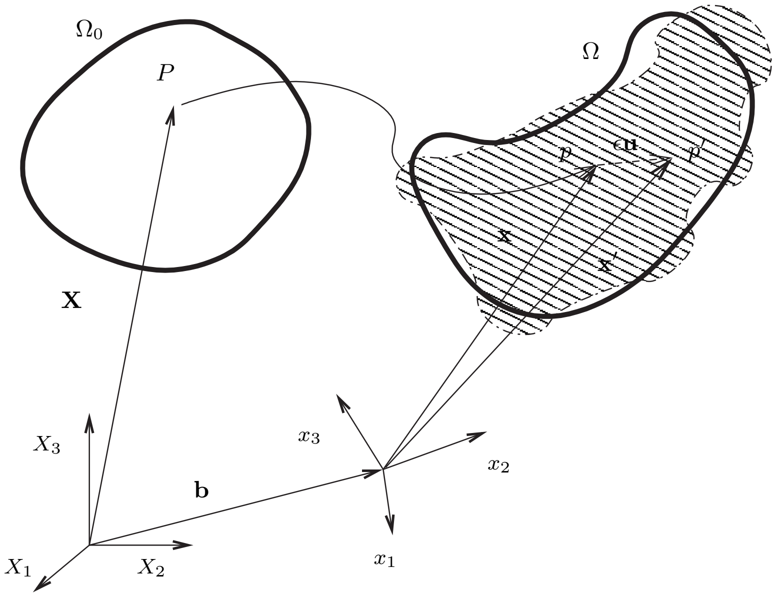


FIG. V.1. **Vibration d’un solide précontraint** Petites déformations (région hachurée Ω') venant s’ajouter aux déformations d’une structure précontrainte (région Ω)

par X_K, avec $K = 1, 2, 3$).

Equilibre statique précontraint

Supposons que ce solide passe de son **état matériel** à un **état statique précontraint** à la suite d’une déformation initiale créée par des forces extérieures de volume $\rho\mathbf{f^o}$ et/ou de surface $\mathbf{t^o}$. Il occupe alors une région de l’espace R, de volume Ω, de surface $\partial\Omega$ et de masse volumique ρ. Le point matériel P, de l’état non déformé, se déplace et coïncide dorénavant avec le point p dans l’état statique précontraint. Sa position est décrite par un système de coordonnées cartésiennes x_1, x_2, x_3 (ou simplement par x_k, avec $k = 1, 2, 3$). Il se crée, dans le solide, un champ de contrainte initial σ^o_{kl}

Les équations d’équilibre statique du solide précontraint sont les suivantes

$$\rho f^o_k + \sigma^o_{kl,l} = 0 \qquad \text{dans } \Omega \tag{V.1}$$

$$t^o_k = \sigma^o_{kl} n_l \qquad \text{sur } \partial\Omega \tag{V.2}$$

ou encore sous forme variationnelle, on peut écrire $\forall\hat{\mathbf{v}}$

$$\int_\Omega \sigma^o_{kl}\hat{v}_{k,l}dv = \int_\Omega \rho f^o_k \hat{v}_k dv + \int_{\partial\Omega} t^o_k \hat{v}_k ds \tag{V.3}$$

On rappelle la définition du tenseur de contrainte σ^o_{kl} en fonction du tenseur de contrainte matériel Σ^o_{KL} de la configuration naturelle

$$\sigma^o_{kl} = (j^o)^{-1} x_{l,L} \Sigma^o_{KL} x_{k,K}, \quad \text{avec} \quad \Sigma^o_{KL} = (\partial\Psi^o/\partial E_{KL}(\mathbf{x})) \tag{V.4}$$

et

$$j^o = \det\left(\partial x_k/\partial X_K\right) = \frac{\rho_0}{\rho} \tag{V.5}$$

Déformation dynamique

On suppose que le solide élastique se trouve dans l'état précontraint jusqu'à l'instant $t = 0$. Par la suite, c'est-à-dire pour $t > 0$, il subit une petite déformation dynamique sous l'effet de forces extérieures de volume $\epsilon\overline{\mathbf{f}}$ et de surface $\epsilon\overline{\mathbf{t}}$ qui s'additionnent aux forces statiques ($\epsilon \ll 1$).

$$\mathbf{f} = \mathbf{f^o} + \epsilon\overline{\mathbf{f}} \tag{V.6}$$

$$\mathbf{t} = \mathbf{t^o} + \epsilon\overline{\mathbf{t}} \tag{V.7}$$

Au cours de cette transformation dynamique, les points de la région R occupent une région de l'espace R', de volume Ω', de surface $\partial\Omega'$ et de masse volumique ρ'. Un point matériel p de l'état précontraint se déplace et coïncide à l'instant $t > 0$ avec le point p' dans l'**état actuel ou déformé**. Le point p' est repéré par ses coordonnées x'_k, avec $k = 1, 2, 3$. Voir figure V.1.

On désigne par $\epsilon\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ le petit déplacement $\vec{pp'}$. De cette manière, on exprime les coordonnées du point p' par :

$$x'_k = x_k + \epsilon u_k(\mathbf{x}, t) \tag{V.8}$$

1.2 Equations dans la configuration actuelle Ω'

Le principe des puissances virtuelles s'énonce dans la description eulérienne par la formulation variationnelle

$\forall\hat{\mathbf{v}}$ trouver $\mathbf{x}'$ tel que

$$\int_{\Omega'} \sigma_{kl}\hat{d}'_{kl}dv' + \int_{\Omega'} \rho'\gamma_k\hat{v}_k dv' = \int_{\Omega'} \rho' f_k\hat{v}_k dv' + \int_{\partial\Omega'} t_k\hat{v}_k ds' \tag{V.9}$$

où $\hat{d}'_{kl}$ est le tenseur des vitesses de déformation dans la configuration actuelle Ω'

$$\hat{d}'_{kl} = \frac{1}{2}\Big((\partial\hat{v}_k/\partial x'_l) + (\partial\hat{v}_l/\partial x'_k) \Big)$$

A partir de ce principe, on dérive la formulation forte non linéaire dans la configuration actuelle

$$\rho'\gamma_k - \sigma_{kl,l} = \rho' f_k \qquad \text{dans } \Omega' \tag{V.10}$$

$$\sigma_{kl}n_l = t_k \qquad \text{sur } \partial\Omega' \tag{V.11}$$

Le tenseur de contrainte σ_{kl} est relié au tenseur de contrainte matériel Σ_{KL} de la configuration naturelle par

$$\sigma_{kl} = J^{-1}x'_{l,L}\Sigma_{KL}x'_{k,K}, \quad \text{avec} \quad \Sigma_{KL} = (\partial\Psi^o/\partial E_{KL}(\mathbf{x}')) \tag{V.12}$$

et

$$J = \det\left(\partial x'_k/\partial X_K\right) = \frac{\rho_0}{\rho'} \tag{V.13}$$

1.3 Equations dans la configuration précontrainte Ω

On remarque que le tenseur $\hat{d}'_{kl}$ fait intervenir des dérivées partielles par rapport à $\mathbf{x}'$. Pour prendre en compte l'équation statique (V.3) qui utilise des dérivées partielles par rapport à $\mathbf{x}$, il faut exprimer les équations dans la configuration précontrainte à l'aide du pseudo tenseur de Boussinesq ou de Piola-Lagrange

$$\tilde{\sigma}_{kl} = j\left(\partial x_k/\partial x'_m\right)\sigma_{ml}, \quad \text{avec} \quad j = \det\left(\partial x'_k/\partial x_l\right) = \frac{\rho}{\rho'} \tag{V.14}$$

Remarquons, aussi, que puisque l'état statique ne dépend pas du temps, l'accélération γ_k s'écrit

$$\gamma_k(\mathbf{x}') = \frac{d^2 x'_k}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}\left(x_k + \epsilon u_k\right) = \epsilon \frac{d^2 u_k}{dt^2} = \epsilon \ddot{u}_k$$

La formulation variationnelle(V.9) exprimée dans la configuration précontrainte devient alors :

$\forall \hat{\mathbf{v}}$ trouver $\mathbf{u}$ tel que

$$\int_\Omega \tilde{\sigma}_{kl} \hat{v}_{l,k} dv + \int_\Omega \epsilon \rho \ddot{u}_k \hat{v}_k dv = \int_\Omega \rho (f^o_k + \epsilon \bar{f}_k) \hat{v}_k dv + \int_{\partial\Omega} (t^o_k + \epsilon \bar{t}_k) \hat{v}_k \frac{ds'}{ds} ds \tag{V.15}$$

avec

$$\hat{d}_{kl} = \frac{1}{2}\Big(\hat{v}_{k,l} + \hat{v}_{l,k}\Big)$$

2 LINÉARISATION DU PSEUDO TENSEUR DE CONTRAINTE

Si l'on parvient à exprimer le pseudo tenseur de contrainte $\tilde{\sigma}_{kl}$ non linéaire (V.14) à partir du tenseur de contrainte σ^o_{kl} qui caractérise l'état précontraint statique sous la forme

$$\tilde{\sigma}_{kl} \simeq \sigma^o_{kl} + \epsilon \bar{\sigma}_{kl} \tag{V.16}$$

où $\bar{\sigma}_{kl}$ est le supplément de contrainte due aux “forces dynamiques” $\epsilon\bar{\mathbf{f}}$ et $\epsilon\bar{\mathbf{t}}$, on aboutit à un système linéaire qu'il sera possible de résoudre par les techniques numériques traditionnelles. On y parvient en effectuant un développement limité au voisinage de la configuration précontrainte.

2.1 Mise en évidence du tenseur de contrainte statique

Il est simple de faire apparaître σ^o_{kl} dans l'expression du tenseur $\tilde{\sigma}_{kl}$ en s'inspirant de la formule (V.4), en effet reportant (V.12) dans (V.14) on a

$$\begin{aligned}
\tilde{\sigma}_{kl} &= j\left(\partial x_k/\partial x'_m\right) J^{-1} x'_{l,L} \Sigma_{KL} x'_{m,K} \\
&= jJ^{-1}\left(\partial x_k/\partial x'm\right) x'_{m,K} \Sigma_{KL} x'_{l,L} \\
&= (j^o)^{-1} x_{k,K} \Sigma_{KL} x'_{l,L} \\
&= (j^o)^{-1} x_{k,K} \Sigma_{KL} x'_{l,m} x_{m,L}
\end{aligned}$$

soit

$$\tilde{\sigma}_{kl} = (j^o)^{-1} x_{k,K} \Sigma_{KL} x_{m,L} x'_{l,m} \tag{V.17}$$

Linéarisation du pseudo tenseur de Piola-Lagrange

Avec cette expression, on peut faire apparaître σ^o. En effet, développons Σ_{KL} au premier ordre au voisinage de l'état précontraint

$$\Sigma_{KL} = \Sigma_{KL}(E^o) + \left(\partial \Sigma_{KL}/\partial E_{MN}\right)\left(E_{MN} - E^o_{MN}\right)$$

or E^o_{MN} représente la déformation avec $\mathbf{u} = 0$ soit d'après (V.8) $E^o_{MN} = E_{MN}(\mathbf{x})$, on a donc

$$\begin{aligned}
E_{MN} - E^o_{MN} &= E_{MN}(\mathbf{x}') - E_{MN}(\mathbf{x}) \\
&= \frac{1}{2}\left(\left(\partial x'_k/\partial X_M\right)\left(\partial x'_k/\partial X_N\right) - \delta_{KL}\right) \\
&- \frac{1}{2}\left(\left(\partial x_k/\partial X_M\right)\left(\partial x_k/\partial X_N\right) - \delta_{KL}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(x'_{k,p} x_{p,M} x'_{k,q} x_{q,N} - x_{k,M} x_{k,N}\right)
\end{aligned}$$

d'après (V.8) $x'_{k,p} = \delta_{kp} + \epsilon u_{k,p}$, en négligeant les termes d'ordre deux en ϵ, il vient

$$E_{MN} - E^o_{MN} = \epsilon x_{p,M} \left[\frac{1}{2}\left(u_{p,q} + u_{q,p}\right)\right] x_{q,N} = \epsilon x_{p,M}\tilde{e}_{pq}(\mathbf{u}) x_{q,N}$$

En posant

$$A_{KLMN} = (\partial \Sigma_{KL}/\partial E_{MN}) = \left(\partial^2 \Psi^o / \partial E_{KL} \partial E_{MN}\right) \tag{V.18}$$

on exprime le tenseur Σ_{KL} au premier ordre au voisinage de l'état précontraint par

$$\Sigma_{KL} = \Sigma_{KL}(E^o) + \epsilon A_{KLMN} x_{p,M} \tilde{e}_{pq}(\mathbf{u}) x_{q,N} \tag{V.19}$$

Linéarisation du tenseur de contrainte

Puisque par définition

$$\sigma^o_{km} = (j^o)^{-1} x_{m,L} \Sigma_{KL}(E^o) x_{k,K},$$

le terme $(j^o)^{-1} x_{k,K} \Sigma_{KL} x_{m,L}$ de (V.17) devient

$$(j^o)^{-1} x_{k,K} \Sigma_{KL} x_{m,L} = \sigma^o_{km} + \epsilon C_{kmpq} \tilde{e}_{pq}(\mathbf{u})$$

où l'on a posé

$$C_{kmpq} = (j^o)^{-1} A_{KLMN} x_{k,K} x_{m,L} x_{p,M} x_{q,N} \tag{V.20}$$

On a donc

$$\tilde{\sigma}_{kl} = \left[\sigma^o_{km} + \epsilon C_{kmpq} \tilde{e}_{pq}(\mathbf{u})\right] x'_{l,m} \tag{V.21}$$

or la relation (V.8) nous permet d'écrire $x'_{l,m}$ sous la forme

$$x'_{l,m} = \delta_{lm} + \epsilon u_{l,m}$$

Le report de cette expression dans (V.21) nous donne finalement [1]

$$\tilde{\sigma}_{kl} = \sigma^o_{kl} + \epsilon\left[\sigma^o_{km} u_{l,m} + C_{klmn} \tilde{e}_{mn}(\mathbf{u})\right] \tag{V.22}$$

Ceci constitue la linéarisation au voisinage de l'état précontraint du pseudo tenseur de contrainte $\tilde{\sigma}_{kl}$ où le supplément de contrainte de l'équation (V.16) est

$$\bar{\sigma}_{kl} = \sigma^o_{km} u_{l,m} + C_{klmn} \tilde{e}_{mn}(\mathbf{u}). \tag{V.23}$$

3 EQUATION VARIATIONNELLE LINÉARISÉE DANS LA CONFIGURATION INITIALE PRÉCONTRAINTE

L'expression du pseudo tenseur des contraintes linéarisé est remplacée dans la formulation variationnelle (V.15)

$$\int_\Omega \left(\sigma^o_{kl} + \epsilon \bar{\sigma}_{kl}\right) \hat{v}_{l,k} dv + \int_\Omega \epsilon \rho \ddot{u}_k \hat{v}_k dv \tag{V.24}$$

$$= \int_\Omega \rho(f^o_k + \epsilon \bar{f}_k) \hat{v}_k dv + \int_{\partial\Omega} (t^o_k + \epsilon \bar{t}_k) \hat{v}_k \frac{ds'}{ds} ds$$

[1] Compte tenu des propriétés de symétrie du tenseur de Piola-Kirchhoff le tenseur C_{klpq} jouit des propriétés de symétrie $C_{klpq} = C_{lkpq} = C_{pqkl} = C_{klqp}$, ce qui réduit à 21 le nombre de coefficients indépendants dans le cas général.

Pour pouvoir éliminer la partie statique (V.3) de cette formulation variationnelle sur Ω, on doit calculer et en linéariser le rapport $\frac{ds'}{ds}$. Ce rapport peut être trouvé dans l'ouvrage de Eringen et Suhubi [1]

$$\frac{ds'}{ds} = j\left(C_{kl}^{-1} n_k n_l\right)^{\frac{1}{2}}$$

avec

$$C_{kl}^{-1} = \left(\partial x_k / \partial x'_m\right)\left(\partial x_l / \partial x'_m\right).$$

Compte tenu de (V.8), on a d'une part

$$\begin{aligned} C_{kl}^{-1} &= (\delta_{km} - \epsilon u_{m,k})(\delta_{lm} - \epsilon u_{m,l}) \\ &\simeq \delta_{kl} - \epsilon(u_{k,l} + u_{l,k}) \end{aligned}$$

et d'autre part $j \simeq 1 + \epsilon u_{k,k}$, d'où

$$\begin{aligned} \frac{ds'}{ds} &\simeq (1 + \epsilon u_{k,k})\left(\delta_{kl} - \epsilon(u_{k,l} + u_{l,k})\right) n_k n_l \\ &\simeq 1 + \epsilon\left(u_{k,k} - \tilde{e}_{\mathbf{n}}\right) \end{aligned}$$

où $\tilde{e}_{\mathbf{n}} = (u_{k,l} + u_{l,k})\, n_k n_l$ représente la déformation infinitésimale dans la direction $\mathbf{n}$. L'intégrale de surface vaut donc

$$\int_{\partial\Omega} \left(t_k^o + \epsilon \bar{t}_k\right) \frac{ds'}{ds} \hat{v}_k ds \simeq \int_{\partial\Omega} t_k^o \hat{v}_k ds + \int_{\partial\Omega} \epsilon\left(\bar{t}_k + u_{k,k} t_k^o - \tilde{e}_{\mathbf{n}} t_k^o\right) \hat{v}_k ds$$

En tenant compte de l'équation d'équilibre statique (V.3) le report de cette expression dans la formulation variationnelle (V.24) nous permet, finalement, de poser le problème suivant :

$\forall \hat{\mathbf{v}}$, trouver $\mathbf{u}$ tel que l'on ait

$$\begin{aligned} \int_\Omega \rho \ddot{u}_k \hat{v}_k dv + \int_\Omega \sigma_{km}^o u_{l,m} \hat{v}_{l,k} dv + \int_\Omega C_{klmn} \tilde{e}_{mn}(\mathbf{u}) \hat{d}_{kl} dv \\ + \int_{\partial\Omega} t_k^o \left(u_{k,k} - \tilde{e}_{\mathbf{n}}\right) \hat{v}_k ds = \int_\Omega \rho \bar{f}_k \hat{v}_k dv + \int_{\partial\Omega} \bar{t}_k \hat{v}_k ds \end{aligned} \qquad \text{(V.25)}$$

4 MATRICE DE RAIDEUR GÉOMÉTRIQUE

La discrétisation de la formulation variationnelle (V.25) par la méthode des éléments finis mène à une nouvelle matrice, appelée matrice de raideur géométrique. Cette matrice est issue de la forme bilinéaire

$$k_{\sigma^o}(\mathbf{u}, \hat{\mathbf{v}}) = \int_\Omega \sigma_{km}^o u_{l,m} \hat{v}_{l,k} dv \qquad \text{(V.26)}$$

Dans la plupart des codes d'éléments finis, il existe une routine de calcul d'une matrice de raideur géométrique utilisée pour traiter les problèmes de flambage. Cependant, ces routines sont des boites noires qui n'ont pas donné les résultats escomptés. Nous avons donc préféré calculer nous mêmes cette matrice pour un élément fini particulier : l'élément isoparamétrique CU8, à 8 sommets et à interpolation linéaire. Le calcul de cette matrice est détaillé à l'annexe B et nécessite au préalable la determination du champ de précontrainte qui règne dans le solide. Dans la pratique, la matrice de raideur géométrique $\mathbb{K}_\sigma$ est additionnée à la matrice de raideur classique $\mathbb{K}$ avant d'effectuer le calcul (IV.10) des modes et des pulsations propres de la structure considérée.

Plusieurs simulations numériques ont été effectuées montrant la modification du spectre de résonance selon le type de précontrainte imposée. Lorsqu'un solide est comprimé, les fréquences propres

décroissent et lorsqu'il est étiré elles augmentent. Lorsque la précontrainte est plus complexe, on assiste à une modification spectrale non homogène intéressante. Sur le plan expérimental, nous avons commencé à mettre en place une expérience permettant de valider ces modèles théoriques. Il s'agit de tordre une plaque d'acier et de mesurer les modes et les fréquences de résonance en effectuant une analyse modale [37]. Déjà quelques mesures ont pu être réalisées. Cependant pour mener à bien la comparaison calcul-expérience nous devons encore développer dans notre code informatique le calcul de la matrice de raideur géométrique pour des éléments de plaque ou de coque puisque l'élément CU8 n'est pas indiqué dans ce cas. En effet, pour donner des résultats satisfaisant, l'élément hexaèdrique doit avoir des dimensions, dans toutes les directions, de l'ordre grandeur de l'épaisseur de la plaque. Dans ces conditions le nombre d'éléments devient trop important (40.000 pour notre expérience).

Deuxième partie

Interaction entre solides

Le comportement dynamique d'un solide a été étudié dans le détail dans la première partie de ce document. Les conditions aux limites, censées traduire les influences extérieures subies par le système, étaient des données du problème. Lorsque deux solides sont en interaction, ce sont précisément ces conditions de bord qu'il faut déterminer. Il est donc nécessaire d'invoquer d'autres principes pour résoudre ce nouveau problème. Le premier est le respect des lois de conservation, non plus seulement dans le volume mais au niveau des interfaces entre solides. Ces relations ont été établies au chapitre I en considérant une surface de discontinuité séparant deux corps mécaniques. Ici, la prise en compte de cette surface prend tout son sens puisqu'elle décrit la discontinuité effective de la densité de masse des solides en interaction. Le second principe est un principe de bon sens : il stipule que deux solides ne peuvent pas se pénétrer l'un l'autre. C'est là une particularité des milieux solides qui n'existe pas pour les milieux fluides. Enfin, il faut prendre en considération l'étude menée en première partie de manière à inclure le comportement individuel de chaque sous-structure dans la dynamique globale.

L'examen des deux premiers principes permet d'obtenir des informations capitales pour la suite. Le principe d'impénétrabilité peut encore se formuler sous la forme

> *Deux solides ne se pénètrent pas si le flux de masse à travers leur surface de séparation Γ_c (Fig. V.2), de vitesse $\mathbf{w}$, est nul, i.e,*
>
> $$\rho_{(a)}(\dot{u}_k^{(a)} - w_k)n_k = \rho_{(b)}(\dot{u}_k^{(b)} - w_k)n_k = 0 \quad \textit{sur } \Gamma_c$$
>
> *où $\rho_{(a)}$ (resp. $\rho_{(a)}$) est la masse volumique du solide (a) (resp. (b)) et $\mathbf{n}$ le vecteur unitaire normal à Γ_c sortant du solide (a).*

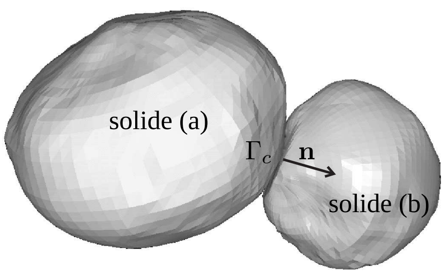


FIG. V.2. **Condition d'impénétrabilité** La surface Γ_c est appelée surface de contact ou surface de glissement. Le flux de masse à travers cette surface est nul.

Selon cette hypothèse, il est possible de simplifier les relations d'interface I.13, I.15, I.18 et I.20 qui traduisent respectivement les lois de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie ainsi que le second principe de la thermodynamique. Il sera montré en détail au chapitre VII que ces simplifications mènent aux propriétés suivantes

par conservation de la masse Les vitesses normales sont égales de part et d'autre de la surface de contact effective[2]. Seules les vitesses tangentielles des particules peuvent subir une discontinuité à la traversée de la surface de séparation. Ceci est une conséquence évidente de la condition d' impénétrabilité.

par conservation de la quantité de mouvement Le vecteur contrainte $\sigma_{kl}n_l$ est continu. Sur la zone effective de contact, la loi de l'action et de la réaction s'applique. C'est la troisième loi de Newton.

par conservation de l'énergie et par le second principe de la thermodynamique En décomposant les vitesses et les contraintes en composantes normales et tangentielles, le bilan de puissance se met sous la forme

$$\sigma_n \llbracket \dot{u}_k \rrbracket_{\Gamma_c} n_k + \sigma_{T_k} \llbracket \dot{u}_{T_k} \rrbracket_{\Gamma_c} = \llbracket q_l \rrbracket_{\Gamma_c} n_l \geq 0 \quad \text{sur } \Gamma_c$$

Puisque la vitesse normale est continue de part et d'autre de la surface de contact, le premier terme est nul. La dissipation, c'est-à-dire la transformation de l'énergie mécanique en chaleur, ne peut se produire que s'il existe une discontinuité de la vitesse tangentielle $\llbracket \dot{u}_{T_k} \rrbracket_{\Gamma_c} \neq 0$: les particules frottent d'un coté à l'autre du plan tangent.

L'hypothèse d'impénétrabilité ne laisse envisager que peu de configurations d'interaction. Nous en voyons principalement trois : le couplage permanent et le contact unilatéral avec ou sans frottement. L'assemblage permanent (ou le collage) de deux ou plusieurs solides est la première possibilité. Connaissant séparément les modes propres de vibration de deux structures, il peut être intéressant de pouvoir prédire leur comportement une fois assemblés.

Lorsque deux solides se heurtent, sans se coller, le contact n'est pas permanent : la surface de contact évolue au cours du temps et les solides n'exercent aucune traction l'un sur l'autre. La force de contact d'un objet sur l'autre est forcément unilatérale. Dans ce cas, on parle de contact unilatéral avec ou sans frottement.

Les résultats obtenus aux chapitres précédents permettent de résoudre ces problèmes d'interaction entre solides. Dans un premier temps, ces résultats sont utilisés pour traiter le problème du couplage permanent de deux structures. Puis, de manière à envisager la deuxième classe de problèmes, la condition de contact unilatéral sera détaillée. Elle permettra d'étudier en fin de chapitre, les problèmes de contact en élasticité statique. Ce travail préliminaire servira à introduire les outils qui permettront d'aborder le cas dynamique. L'étude du contact dynamique entre deux solides élastiques sans frottement a fait l'objet d'un article de revue et constituera le second chapitre. Le problème du contact avec frottement en dynamique est un problème qui requiert un traitement spécifique et complexe. Il ne sera pas traité ici mais fait l'objet des perpectives de recherche.

[2]La taille de la surface de contact peut changer au cours du temps. C'est d'ailleurs la principale difficulté des problèmes de contact.

VI

Contact en élasticité

1 COUPLAGE PERMANENT

Cette section expose les conditions d'un assemblage de deux solides élastiques par collage. Connaissant les propriétés de chacun des solides, le comportement dynamique de l'ensemble est obtenu en utilisant deux méthodes de résolution.

1.1 Conditions de couplage

Considérons deux solides (a) et (b) assemblés par collage sur une partie de leur surface commune notée Γ_c. Les conditions qui expriment l'assemblage sont simples : les déplacements $\mathbf{u}$ de part et d'autre de la surface de contact sont identiques et les forces $\boldsymbol{\sigma}$ sont opposées et ceci dans toutes les directions de l'espace

$$\text{sur } \Gamma_c \quad \begin{cases} \mathbf{u}^{(a)} = \mathbf{u}^{(b)}, \\ \boldsymbol{\sigma}^{(a)} = -\boldsymbol{\sigma}^{(b)}. \end{cases} \tag{VI.1}$$

Par simple dérivation, il est facile de vérifier que le champ de vitesse, qu'il soit dans la direction normale où tangentielle, est continu à la traversé de Γ_c. Il n'y a donc aucune dissipation d'énergie mécanique à l'interface. Le problème est de trouver les champs de déplacement et de forces sur la surface de collage lorsque les solides sont par ailleurs soumis à des champs de force volumique (le poids par exemple) et éventuellement à d'autres conditions aux limites portant sur des surfaces disjointes de Γ_c. Puisque que les déplacements sont identiques et les forces opposées, il suffit de

déterminer le couple $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma})$ tel que

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^{(a)} = \mathbf{u}^{(b)}, \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{(a)} = -\boldsymbol{\sigma}^{(b)}, \quad \text{sur } \Gamma_c$$

Selon la configuration physique du système mécanique, deux méthodes sont possibles.

1.2 Méthode par condition de Neumann

Cette méthode présuppose qu'il existe un champ de force surfacique $\boldsymbol{\sigma}$ sur Γ_c qui participe à la création du champ de déplacement $\mathbf{u}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Gamma_c$. Grâce à la représentation intégrale (III.23), il est possible d'exprimer ce champ de déplacement en fonction de $\boldsymbol{\sigma}$ en utilisant le noyau de Poisson de chaque solide. Cette expression est la somme de deux termes. Pour le solide (a) cela donne

$$u_i(\mathbf{x}, t) = \tilde{u}_i^{(a)}(\mathbf{x}, t) + \int_{\Gamma_c} P^{(a)}{}_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}; t) * \sigma_k(\mathbf{y}, t)\, ds_{\mathbf{y}}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_c$$

Le terme $\tilde{u}^{(a)}$ correspond au déplacement de la surface Γ_c dû à l'influence des sources placées en dehors de cette surface. C'est un terme connu puisque les sources $\rho\bar{\mathbf{f}}$, $\bar{\mathbf{t}}$ et $\bar{\mathbf{u}}$ sont connues. Il s'écrit

$$\begin{aligned} \tilde{u}_i^{(a)}(\mathbf{x}, t) &= \int_{\Omega^{(a)}} P^{(a)}{}_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}; t) * \rho\bar{f}_k^{(a)}(\mathbf{y}, t)\, dv_{\mathbf{y}} \\ &+ \int_{\Gamma_n^{(a)}} P^{(a)}{}_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}; t) * \bar{t}_k^{(a)}(\mathbf{y}, t)\, ds_{\mathbf{y}} + \int_{\Gamma_d^{(a)}} P^{(a)}{}_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}; t) * \bar{u}_k^{(a)}(\mathbf{y}, t)\, ds_{\mathbf{y}} \end{aligned}$$

En faisant de même avec le solide (b) et en soustrayant, une équation intégrale, portant sur l'inconnu $\boldsymbol{\sigma}$, est obtenue

$$\int_{\Gamma_c} P_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}; t) * \sigma_k(\mathbf{y}, t)\, ds_{\mathbf{y}} = \tilde{u}_i^{(b)}(\mathbf{x}, t) - \tilde{u}_i^{(a)}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_c \qquad \text{(VI.2)}$$

Le terme source est le membre de droite (connu) et le noyau P de cette équation intégrale est la somme des noyaux de Poisson des solides (a) et (b)

$$P_i^k = P^{(a)}{}_i^k + P^{(b)}{}_i^k.$$

Cette méthode est bien adaptée pour assembler des objets qui, avant leur interaction, présentent une surface libre de tout effort. Cependant, lorsqu'il existe réellement une surface de Dirichlet, (par exemple lors de l'assemblage d'une corde et d'une table d'harmonie), cette méthode ne fonctionne plus. La surface de fixation n'est pas une surface libre de tout effort. Dans ce cas, il faut envisager la méthode par condition de Dirichlet.

1.3 Méthode par condition de Dirichlet

A l'inverse de la précédente, cette méthode présuppose l'existence d'un champ de déplacement $\mathbf{u}$ sur Γ_c qui participe à la création du champ de force $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Gamma_c$. La surface de contact permanente Γ_c est considérée comme une surface de Dirichlet. Le champ de force $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$ est exprimé grâce à la représentation intégrale (III.25). Pour le solide (a) cela donne

$$\sigma_i(\mathbf{x}, t) = \tilde{\chi}_i^{(a)}(\mathbf{x}, t) + \int_{\Gamma_c} X^{(a)}{}_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}; t) * u_k(\mathbf{y}, t)\, ds_{\mathbf{y}}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_c$$

Cette fois le terme $\tilde{\chi}_i^{(a)}(\mathbf{x},t)$ correspond à la force observée sur la surface Γ_c due à l'influence des sources placées en dehors de cette surface. Ce terme est connu et s'écrit

$$\begin{aligned}\tilde{\chi}_i^{(a)}(\mathbf{x},t) &= \int_{\Omega^{(a)}} X^{(a)}{}_i^k(\mathbf{x},\mathbf{y};t) * \rho \bar{f}_k^{(a)}(\mathbf{y},t)\, dv_{\mathbf{y}} \\ &+ \int_{\Gamma_n^{(a)}} X^{(a)}{}_i^k(\mathbf{x},\mathbf{y};t) * \bar{t}_k^{(a)}(\mathbf{y},t)\, ds_{\mathbf{y}} + \int_{\Gamma_d^{(a)}} X^{(a)}{}_i^k(\mathbf{x},\mathbf{y};t) * \bar{u}_k^{(a)}(\mathbf{y},t)\, ds_{\mathbf{y}}\end{aligned}$$

En effectuant la même procédure pour le solide (b) et en additionnant, il vient l'équation intégrale d'inconnu $\mathbf{u}$

$$\int_{\Gamma_c} X_i^k(\mathbf{x},\mathbf{y};t) * u_k(\mathbf{y},t)\, ds_{\mathbf{y}} = -\left[\tilde{\chi}_i^{(a)}(\mathbf{x},t) + \tilde{\chi}_i^{(b)}(\mathbf{x},t)\right], \quad \mathbf{x} \in \Gamma_c \qquad \text{(VI.3)}$$

1.4 Résolution des équations intégrales

Ces équations intégrales sont résolues numériquement. Les noyaux de Poisson sont calculés pour chaque structure par la méthode modale et la relation force déplacement peut alors s'exprimer sous la forme d'une convolution du type (IV.15). Le temps est ensuite découpé en tranches de durée Δt de manière à transformer le produit de convolution continu sous la forme d'une somme discrète. Seul un terme de cette somme doit être déterminé à chaque pas d'échantillonnage. Ainsi de proche en proche l'évolution des systèmes en interaction est prédit. Toutes ces procédures sont détaillées au chapitre VII lors de la résolution du contact unilatéral (section 3.3 et 3.4).

2 COUPLAGE UNILATÉRAL

Lorsque le couplage n'est pas permanent les particules de l'un ou l'autre solide sont, ou ne sont pas, en contact selon la distance qu'il existe entre les objets. La condition d'impénétrabilité est maintenant détaillée dans le domaine continu puis dans le domaine numérique.

2.1 Notations et conventions

La condition de contact est établie en adoptant une formulation maître-esclave dont la traduction anglaise est "master-slave" (indices m et s dans la suite). C'est une formulation classique, que l'on trouve par exemple dans l'article de Laursen & al. [38], qui nécessite un choix arbitraire entre surface maître et surface esclave. Il existe depuis une publication du laboratoire de mécanique de Marseille[39] qui propose une formulation symétrique où les rôles de maître et d'esclave sont interchangés de manière à éviter cet arbitraire. Le lecteur est renvoyé vers la lecture de cet article pour affiner la méthode classique présentée ci-dessous.

Considérons pour cela deux solides élastiques, représentés sur la figure (VI.1), occupant les domaines Ω_s et Ω_m dans leur configuration κ_0 de référence. Une particule matérielle P_s (resp. P_m) appartenant au solide élastique (s) (resp. (m)) est repérée par ses coordonnées lagrangiennes $\mathbf{X}^s = (X_1^s, X_2^s, X_3^s)$ (resp. $\mathbf{X}^m = (X_1^m, X_2^m, X_3^m)$). Si cette particule peut, après déformation, être en contact avec l'autre solide, alors elle appartient à une surface matérielle, que l'on nomme Γ_c^s (resp. Γ_c^m).

Cette particule est aussi repérée par ses coordonnées eulériennes, $\mathbf{x}^s = (x_1^s, x_2^s, , x_3^s)$ (resp. $\mathbf{x}^m = (x_1^m, x_2^m, x_3^m)$, dans la configuration actuelle κ (configuration déformée). Son déplacement est alors donné par

$$u_i^s = x_i^s - X_i^s, \quad \text{(resp.} \quad u_i^m = x_i^m - X_i^m), \quad i = 1, 2, 3$$

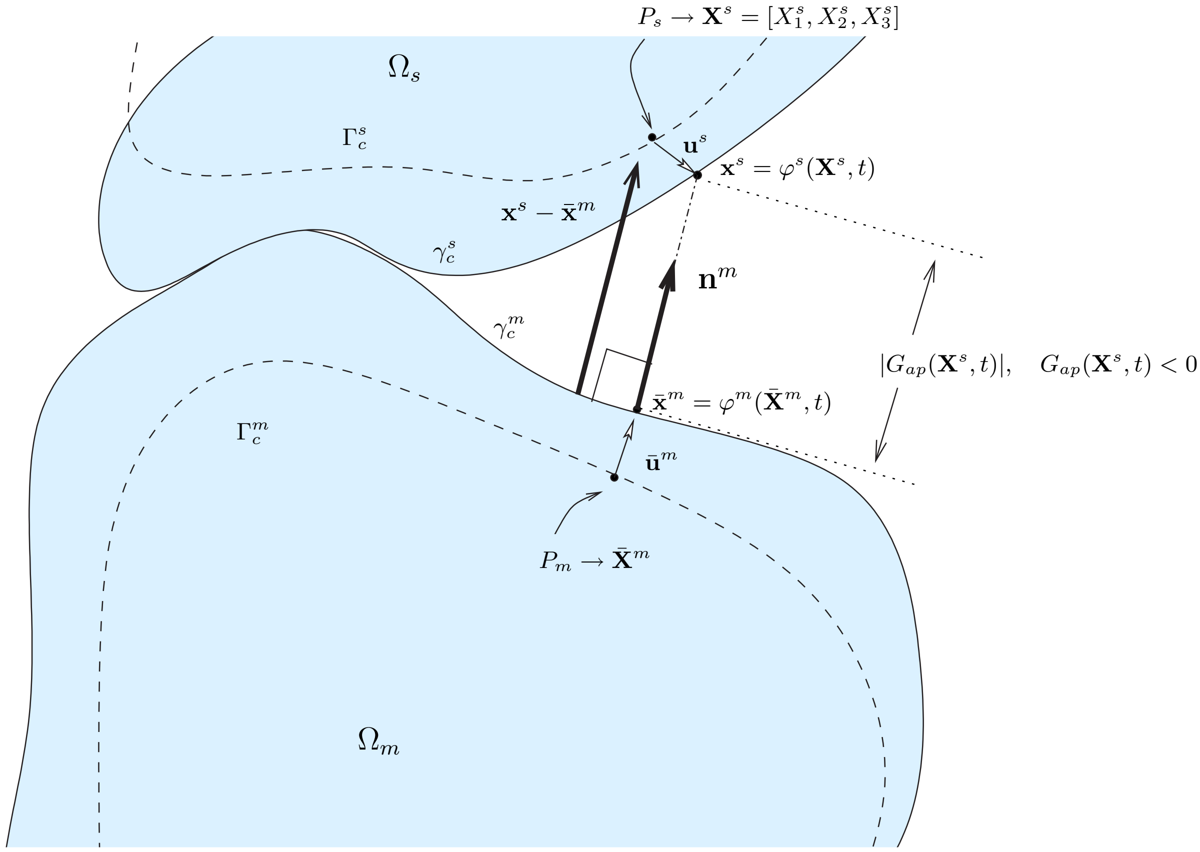


FIG. VI.1. **Condition de contact dans la configuration déformée** Une particule matérielle P_s appartenant à la surface potentielle de contact "esclave" Γ_c^s subit, à l'instant t, un déplacement $\mathbf{u}^s$ et occupe, dans la configuration déformée, le point $\mathbf{x}^s = \varphi^s(\mathbf{X}^s, t)$. Le point de la surface "maître" γ_c^m le moins éloigné de $\mathbf{x}^s$ est noté $\bar{\mathbf{x}}^m = \varphi^m(\bar{\mathbf{X}}^m, t)$. La mesure orientée de cette distance est réalisée par la fonction matérielle $G_{ap}(\mathbf{X}^s, t)$. Par convention, lorsque les points $\mathbf{x}^s$ et $\bar{\mathbf{x}}^m$ occupent une position admissible (non pénétration des solides) le signe de la fonction G_{ap} est négatif. La condition d'impénétrabilité des solides s'écrit donc

$$G_{ap}(\mathbf{X}^s, t) \leq 0, \quad \forall \mathbf{X}^s \in \Gamma_c^s$$

Une fonction φ est supposée exister permettant de relier ces deux types de coordonnées

$$\mathbf{x}^s = \varphi^s(\mathbf{X}^s, t) \quad \text{et} \quad \mathbf{x}^m = \varphi^m(\mathbf{X}^m, t) \tag{VI.4}$$

Cette fonction permet aussi de relier les surfaces matérielles de contact Γ_c^s et Γ_c^m aux surfaces déformées notées γ_c^s et γ_c^m (cf. Fig. (VI.1))

$$\gamma_c^s = \varphi^s(\Gamma_c^s, t) \quad \text{resp.} \quad \gamma_c^s = \varphi^s(\Gamma_c^m, t)$$

En tout point $\mathbf{X}^s$ de la surface matérielle esclave Γ_c^s et à tout instant t, la condition d'impénétrabilité (condition de contact) est écrite en terme d'une fonction "intervalle" $G_{ap}(\mathbf{X}^s, t)$ ("gap" en anglais). Elle correspond à une mesure au point $\mathbf{x}^s = \varphi^s(\mathbf{X}^s, t)$ de la distance minimum qui existe entre les surfaces de contact potentielles dans la configuration déformée κ (cf. Fig. (VI.1))

$$\begin{cases} G_{ap}(\mathbf{X}^s, t) = sgn(G_{ap}).|G_{ap}(\mathbf{X}^s, t)| \\ \text{où} \\ |G_{ap}(\mathbf{X}^s, t)| = \inf_{\mathbf{X}^m \in \Gamma_c^m} ||\varphi^s(\mathbf{X}^s, t) - \varphi^m(\mathbf{X}^m, t)|| = ||\mathbf{x}^s - \bar{\mathbf{x}}^m|| \\ \text{avec la convention} \\ sgn(G_{ap}) = \begin{cases} -1 & \text{si les solides ne se pénétrent pas} \\ +1 & \text{si les solides se pénétrent} \end{cases} \quad \text{au point } \mathbf{x}^s = \varphi^s(\mathbf{X}^s, t). \end{cases} \tag{VI.5}$$

Le point $\bar{\mathbf{x}}^m$ correspond à la projection orthogonale du point "esclave" $\mathbf{x}^s \in \gamma_c^s$ sur la surface "maître" γ_c^m (cf Fig. (VI.1)). Ainsi la condition d'impénétrabilité des solides s'énnonce par

$$G_{ap}(\mathbf{X}^s, t) \leq 0, \quad \forall \mathbf{X}^s \in \Gamma_c^s. \tag{VI.6}$$

2.2 Linéarisation de la condition de contact

Il est clair , vu les définitions (VI.4), que la fonction intervalle $G_{ap}(\mathbf{X}^s, t)$ dépend des déplacements des surfaces maître et esclave et qu'elle peut être écrite $G_{ap}(\mathbf{u}^s, \mathbf{u}^m)$. Il sera utile pour la suite d'étudier la variation de cette fonction intervalle lorsque les déplacements changent d'une manière infinitésimale dans des directions arbitraires $\mathbf{v}^s$ et $\mathbf{v}^m$. Pour cela, la dérivée de Lie (ou "Gâteaux dérivative" en terme anglo-saxon) est introduite par la définition

$$\langle \nabla G_{ap}(\mathbf{u}^s, \mathbf{u}^m) \,|\, \mathbf{v}^s, \mathbf{v}^m \rangle = \lim_{\theta \to 0} \frac{1}{\theta} \Big(G_{ap}(\mathbf{u}^s + \theta \mathbf{v}^s, \mathbf{u}^m + \theta \mathbf{v}^m) - G_{ap}(\mathbf{u}^s, \mathbf{u}^m) \Big).$$

Pour simplifier la notation, cette dérivée sera notée dans la suite $\langle \nabla G_{ap}(\mathbf{u}) \,|\, \mathbf{v} \rangle$. Nous allons montrer que cette variation peut s'écrire

$$\langle \nabla G_{ap}(\mathbf{u}) \,|\, \mathbf{v} \rangle = -\mathbf{n}^m.(\mathbf{v}^s - \mathbf{v}^m) \tag{VI.7}$$

où $\mathbf{n}^m$ est la normale sortante à la surface maître γ_c^m au point $\bar{\mathbf{x}}^m$. En effet, compte tenu de (VI.5), la loi de dérivation d'un produit donne

$$\langle \nabla G_{ap}(\mathbf{u}) \,|\, \mathbf{v} \rangle = sgn(G_{ap}).\, \langle \nabla |G_{ap}(\mathbf{u})| \,|\, \mathbf{v} \rangle + \langle \nabla sgn(G_{ap}) \,|\, \mathbf{v} \rangle \,.|G_{ap}(\mathbf{u})| \tag{VI.8}$$

Le dernier terme est nul puisque le signe, $sgn(G_{ap})$, ne peut varier que lorsque la fonction intervalle G_{ap} s'annulle. En remarquant par ailleurs que, d'une part, le carré de la distance vaut

$$|g_{ap}(\mathbf{u} + \theta \mathbf{v})|^2 = |g_{ap}(\mathbf{u}|^2 + 2\theta(x_i^s - \bar{x}_i^m)(v_i^s - v_i^m) + \epsilon \theta^2$$

et que par conséquent

$$\left\langle \nabla |G_{ap}(\mathbf{u})|^2 \,|\, \mathbf{v} \right\rangle = 2(x_i^s - \bar{x}_i^m)(v_i^s - v_i^m),$$

et que, d'autre part,

$$\left\langle \nabla |G_{ap}(\mathbf{u})|^2 \,|\, \mathbf{v} \right\rangle = 2 \left\langle \nabla |G_{ap}(\mathbf{u})| \,|\, \mathbf{v} \right\rangle . |G_{ap}(\mathbf{u})|,$$

il est possible d'obtenir la variation de la distance par

$$\left\langle \nabla |G_{ap}(\mathbf{u})| \,|\, \mathbf{v} \right\rangle = \frac{(x_i^s - \bar{x}_i^m)(v_i^s - v_i^m)}{|G_{ap}(\mathbf{u})|} = \frac{(\mathbf{x^s} - \bar{\mathbf{x}}^m)(\mathbf{v}^s - \mathbf{v}^m)}{|\mathbf{x^s} - \bar{\mathbf{x}}^m|}$$

Or, une partie de cette expression, comme l'illustre la figure (VI.1), représente précisement la normale sortante à la surface maître γ_c^m au point $\bar{\mathbf{x}}^m$ (au signe près) :

$$\frac{(\mathbf{x^s} - \bar{\mathbf{x}}^m)}{|\mathbf{x^s} - \bar{\mathbf{x}}^m|} = -sgn(g_{ap})\mathbf{n}^m.$$

Ainsi, appliquant (VI.8), le résultat (VI.7) est obtenu.

2.3 Condition de contact unilatéral sans frottement

S'il n'y a pas de frottement, les surfaces de contact Γ_c^s et Γ_c^m sont supposées parfaitement lubrifiées. Si $\boldsymbol{\sigma}$ est le tenseur de contrainte de Cauchy, $\sigma_n = \sigma_{ij} n_j n_j$ sa composante normale sur la surface de contact, et $\sigma_T = \sigma_{ij} n_j - \sigma_n n_i$ sa composante tangentielle, alors l'hypothèse de non frottement s'écrit

$$\sigma_T = \sigma_{ij} n_j - \sigma_n n_i = 0 \quad \text{sur } \Gamma_c^s \text{ ou } \Gamma_c^m$$

De plus, si les solides élastiques ne sont pas en contact alors la contrainte surfacique est nulle et s'il y a contact cette contrainte ne peut être que positive (pour une normale sortante du solide maitre, donc entrante dans le solide esclave) : les objets ne pouvant exercer aucune force de rappel ou de traction l'un sur l'autre. C'est ce qui caractérise le contact unilatéral

$$\begin{cases} \sigma_n = 0 & \text{si} \quad G_{ap}(\mathbf{X}^s, t) \leq 0 \\ \sigma_n \geq 0 & \text{si} \quad G_{ap}(\mathbf{X}^s, t) = 0 \end{cases} \tag{VI.9}$$

pour toute particule $\mathbf{X}^s$ de la surface Γ_c^s. Remarquons que si les relations (VI.9) sont vérifiées nous devons avoir

$$\sigma_n G_{ap}(\mathbf{X}^s, t) = 0, \quad \forall \mathbf{X} \in \Gamma_c^s$$

La condition générale de contact unilatéral en l'absence de frottement est obtenue en rassemblant tous ces résultats :

$$\forall \mathbf{X} \in \Gamma_c^s \begin{cases} G_{ap}(\mathbf{X}^s, t) \leq 0 \\ \sigma_T = 0, \quad \sigma_n \geq 0 \\ \sigma_n G_{ap}(\mathbf{X}^s, t) = 0 \end{cases} \tag{VI.10}$$

2.4 Approximation par éléments finis de la condition de contact

Supposons que les domaines $\overline{\Omega}_s$ et $\overline{\Omega}_m$ soit discrétisés par éléments finis comme indiqué sur la figure (VI.2). Si on approxime la condition de contact (VI.10) par

$$u_n^r(x_1^k) \leq g_{ap}(x_1^k), \quad (x_1^k, \phi(x_1^k)) \in \Gamma_c^s, \quad k \in \Sigma_c^s \tag{VI.11}$$

où Σ_c^s est l'ensemble des indices des noeuds se trouvant sur la surface Γ_c^s, alors pour calculer $u_n^r(x_1^k) = u_n^s - u_n^m$, il faut pouvoir estimer le déplacement normal $u_n^m(x_1^k, x_2^k)$ qui ne correspond pas

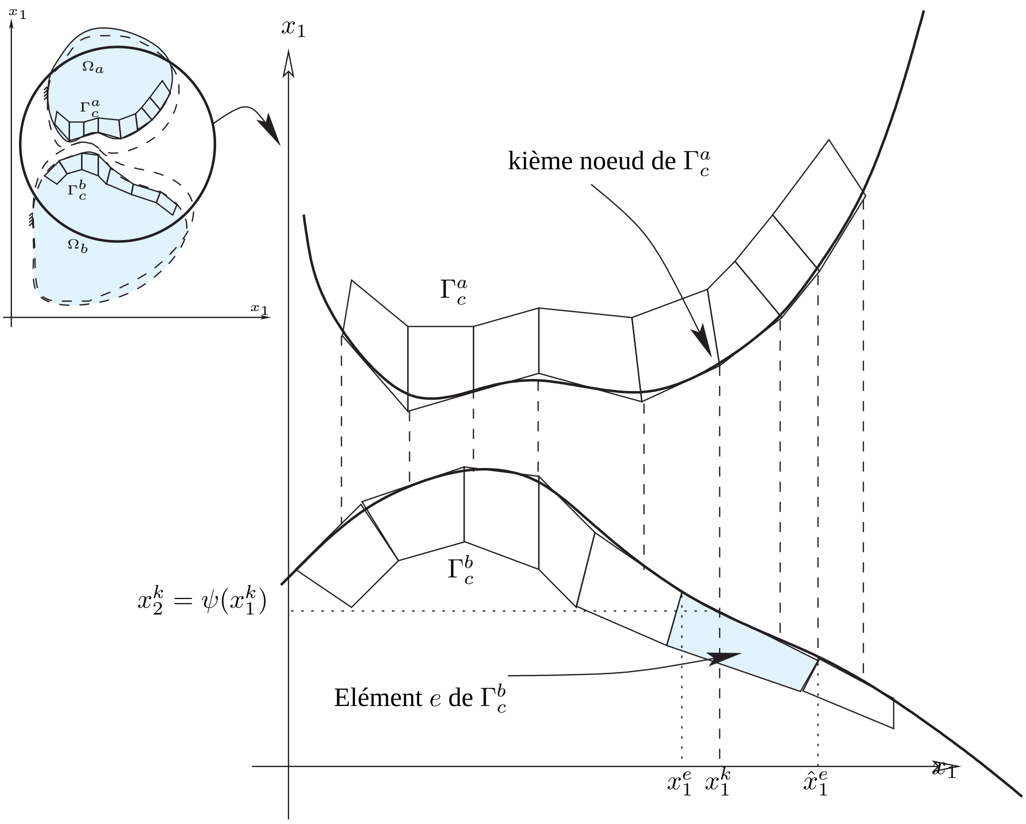


FIG. VI.2. *Projection par éléments finis de* Γ_c^s *sur* Γ_c^m

forcément à une valeur nodale puisqu'il n'y a aucune raison pour que la projection verticale (selon l'axe 1) des noeuds de la surface Γ_c^s coïncide avec des noeuds de la surface Γ_c^m. Cependant, selon l'approximation classique par éléments finis, il est possible de trouver i fonctions d'interpolation $N_i(x)$ telles que le déplacement recherché puisse s'écrire

$$u_n^m(x_1^k, x_2^k) = N_i(x_1^k)U_i^m, \quad i \in \Sigma_c^m$$

où les termes

$$U_i^m = u_n^m(x_1^i, \psi(x_1^i)), \quad i \in \Sigma_c^m$$

représentent les déplacements des noeuds situés sur la surface Γ_c^m, l'ensemble des indices correspondants étant Σ_c^m.

Calcul de la condition de contact pour des problèmes plans Si les fonctions d'interpolations sont choisies linéaires, elles s'écrivent

$$N_i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} & \text{si } x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} & \text{si } x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

et si la projection du kième noeud de Γ_c^s se trouve appartenir à l'élément e de la surface Γ_c^m (cf. figure VI.2), alors le terme recherché s'écrit

$$u_n^m(x_1^k, x_2^k) = \theta^k U_{j(k)}^m + (1-\theta^k) U_{\hat{j}(k)}^m \tag{VI.12}$$

avec

$$\begin{aligned} U_{j(k)}^m &= u_n^m(x_1^e, \psi(x_1^e)) \\ U_{\hat{j}(k)}^m &= u_n^m(\hat{x}_1^e, \psi(\hat{x}_1^e)) \\ \theta^k &= \frac{\hat{x}_1^e - x_1^k}{\hat{x}_1^e - x_1^e} \end{aligned}$$

où $(x_1^e, \psi(x_1^e))$ et $(\hat{x}_1^e, \psi(\hat{x}_1^e))$ sont les noeuds de l'élément e situés sur Γ_c^m et $j(k)$ et $\hat{j}(k)$ leur indice respectif appartenant à Σ_c^m.

Le calcul de $g_{ap}(x_1^k)$ nécessite, par ailleurs, de connaître $\psi(x_1^k)$ et $\psi'(x_1^k)$ qui s'obtiennent par

$$\psi(x_1^k) = \theta^k \psi(x_1^e) + (1-\theta^k)\psi(\hat{x}_1^e), \quad \psi'(x_1^k) = \frac{\psi(\hat{x}_1^e) - \psi(x_1^e)}{\hat{x}_1^e - x_1^e} \tag{VI.13}$$

Dès lors, il devient possible d'estimer numériquement la kième condition de contact sur Γ_c^s par l'expression (VI.11), à condition de connaître pour chaque noeud k la valeur θ^k correspondante et les indices, $j(k)$ et $\hat{j}(k)$, des noeuds de Γ_c^m.

L'algorithme suivant peut être utilisé

1. partant du premier noeud de Γ_c^s, $k = 1$
2. $e = 0$
3. $e = e + 1$
4. pour le eime élément de Γ_c^m, identifier les indices, $j(k)$ et $\hat{j}(k)$, des noeuds de l'élément e se trouvant sur la surface Γ_c^m dont les coordonnées selon l'axe 1 sont respectivement x_1^e et $\hat{x}_1^e$
5. étudier le signe du produit $P = (x_1^e - x_1^k)(\hat{x}_1^e - x_1^k)$
6. si $P > 0$, la projection du kième noeud n'appartient pas à l'élément e, retourner au pas 3)
7. si $P \leq 0$, mémoriser les indices $j(k)$ et $\hat{j}(k)$, la valeur $\theta^k = \frac{\hat{x}_1^e - x_1^k}{\hat{x}_1^e - x_1^e}$ et la valeur de l'intervalle, g_{ap}^k, par l'intermédiaire des relations (VI.13).
8. retourner au pas 2) pour $k = k + 1$.

Dès lors, la condition de contact numérique devient

$$U_k^s - \left[\theta^k U_{j(k)}^m + (1-\theta^k) U_{\hat{j}(k))}^m\right] \leq g_{ap}^k, \quad k \in \Sigma_c^s \tag{VI.14}$$

Bien sûr, il faut envisager un algorithme un peu plus compliqué pour des problèmes tri-dimensionnels, mais qui reprend, en l'adaptant, la démarche présentée ci-dessus.

3 CONTACTS STATIQUES

Cette section est consacrée à l'étude du contact statique entre deux solides. Le problème est envisagé dans le cadre des théories mathématiques d'optimisation sous contrainte. Après avoir rappelé les équations d'équilibre statique, la formulation variationnelle d'un problème de contact est présentée. L'utilisation d'une formulation réciproque permet ensuite de poser un problème d'optimisation pour lequel la pression de contact est l'inconnue. La solution est finalement obtenue par une méthode de projection.

3.1 Formulation variationnelle

Fonctionnelle d'énergie potentielle totale

Considérons un problème de déformation d'un solide hyperélastique $\overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^3$ soumis à des forces de volume $\mathbf{f}$ et de surface $\mathbf{t}$. Un solide est dit hyperélastique s'il existe une énergie potentielle différentiable w, représentant l'énergie de déformation par unité de volume qui caractérise le comportement mécanique du matériau du solide. Cette fonction w est supposée dépendre du gradient, $\nabla \mathbf{v}(\mathbf{X})$, du champ de déplacement $\mathbf{v}$ au point matériel $\mathbf{X}$ et éventuellement de la position $\mathbf{X}$, soit

$$w = w(\nabla \mathbf{v}(\mathbf{X}), \mathbf{X}), \quad \mathbf{X} \in \overline{\Omega}$$

Dans ces conditions et en notant $\mathcal{E}$ l'ensemble des déplacements admissibles, l'énergie potentielle totale du système est définie par une fonctionnelle

$$\mathrm{V} : \mathcal{E} \to \mathbb{R} \quad \mathrm{V}(\mathbf{v}) = \int_\Omega w(\nabla \mathbf{v}(\mathbf{X}), \mathbf{X})\, dv - f(\mathbf{v})$$

où $dv = dx_1 dx_2 dx_3$ et f est une fonction linéaire sur $\mathcal{E}$ représentant le travail dû aux forces extérieures $\mathbf{f}$ et $\mathbf{t}$. Par exemple, si $\mathbf{f}$ et $\mathbf{t}$ sont des fonctions lentement variables et mesurables de la variable $\mathbf{X}$, alors f aura la forme

$$f(\mathbf{v}) = \int_\Omega \mathbf{f}\mathbf{v}\, dv + \int_{\Gamma_n} \mathbf{t}\mathbf{v}\, ds$$

où Γ_n est une partie de la surface Γ du solide sur laquelle les forces de traction $\mathbf{t}$ sont appliquées et ds est l'élément de surface.

Si l'on se place dans le cadre de l'approximation des "petites déformations", l'énergie de déformation est donnée sous la forme quadratique suivante

$$w = \frac{1}{2} C_{ijkl}(\mathbf{X}) \epsilon_{ij}(\mathbf{v}) \epsilon_{kl}(\mathbf{v})$$

où $\epsilon_{ij}(\mathbf{v})$ est le tenseur des déformations défini par

$$\epsilon_{ij}(\mathbf{v}) = \frac{1}{2}\left(v_{i,j} + v_{j,i}\right)$$

$C_{ijkl}(\mathbf{X})$ est le tenseur de Hooke qui regroupe les constantes d'élasticité du matériau. Si bien que la fonctionnelle d'énergie potentielle totale a pour forme

$$\mathrm{V} : \mathcal{E} \to \mathbb{R} \quad \mathrm{V}(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} k(\mathbf{v}, \mathbf{v}) - f(\mathbf{v}) \tag{VI.15}$$

en notant $k(.,.)$ la forme bilinéaire de $\mathcal{E} \times \mathcal{E} \to \mathbb{R}$

$$k(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = \int_\Omega C_{ijkl} v_{k,l} v_{i,j}\, dv \tag{VI.16}$$

Cette fonctionnelle est différentiable et sa dérivée s'écrit

$$\langle \nabla \mathrm{V}(\mathbf{u}) \mid \mathbf{v} \rangle = k(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - f(\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{E}$$

Condition de Dirichlet

Le solide peut aussi être soumis à un déplacement imposé $\bar{\mathbf{u}}$ sur une partie Γ_d de sa surface Γ. L'ensemble $\mathcal{U}$ des déplacements admissibles, sous ensemble de l'espace de Sobolev $\mathrm{H}^1(\Omega)$, a donc pour forme

$$\mathcal{U} = \{\mathbf{v} \in \mathrm{H}^1(\Omega)\,; \quad \gamma_d(\mathbf{v}) = \bar{\mathbf{u}} \quad \text{sur } \Gamma_d\} \tag{VI.17}$$

où l'opérateur de trace $\gamma_d(\mathbf{v})$ est une projection de $\mathrm{H}^1(\Omega)$ sur $\mathrm{H}^{1/2}(\Gamma_d)$ définie par

$$\gamma_d(\mathbf{v}) = \mathbf{v}|_{\Gamma_d}. \tag{VI.18}$$

$\mathrm{H}^{1/2}(\Gamma_d)$ est l'espace des déplacements sur la surface Γ_d. Autrement dit, l'opérateur $\gamma_d(\mathbf{v})$ est "la restriction" sur la surface Γ_d du champ de déplacement $\mathbf{v} \in \mathrm{H}^1(\Omega)$.

Le système physique est à l'équilibre dans le cas où l'énergie potentielle totale est minimale. Mathématiquement, cela consiste à résoudre le problème suivant : trouver le champ de déplacement $\mathbf{u}$ tel que

$$\mathbf{u} \in \mathcal{U}, \quad \text{et} \quad \mathrm{V}(\mathbf{u}) = \inf_{\mathbf{v} \in \mathcal{U}} \mathrm{V}(\mathbf{v}) \tag{VI.19}$$

L'ensemble $\mathcal{U}$ est un ensemble convexe. En effet, il est facile de vérifier que pour deux éléments $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ de $\mathcal{U}$, l'élément $\mathbf{w}$ qui appartient au segment fermé $[\mathbf{u}, \mathbf{v}]$, qui a donc pour forme $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \theta(\mathbf{v} - \mathbf{u})$, $\theta \in [0, 1]$, est tel que $\gamma_d(\mathbf{w}) = \bar{\mathbf{u}}$.

D'après le théorème (A.11), la solution $\mathbf{u}$ du problème de minimisation (VI.19), sur l'ensemble convexe $\mathcal{U}$, vérifie l'inégalité d'Euler [1]

$$\langle \nabla \mathrm{V}(\mathbf{u}) \,|\, \mathbf{v} - \mathbf{u} \rangle \geq 0, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{U}$$

soit encore dans le cadre de l'approximation des "petites déformations"

$$k(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) \geq f(\mathbf{v} - \mathbf{u}), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{U}$$

De manière équivalente, il est aussi possible de construire le Lagrangien L défini par

$$L : \mathrm{H}^1(\Omega) \times \mathrm{H}^{-1/2}(\Gamma_d) \to \mathbb{R}, \quad L(\mathbf{v}, \boldsymbol{\kappa}) = \mathrm{V}(\mathbf{v}) + \langle \boldsymbol{\kappa} \,|\, \gamma_d(\mathbf{v}) - \bar{\mathbf{u}} \rangle_{\Gamma_d}$$

où $\mathrm{H}^{-1/2}(\Gamma_d)$ représente le dual de l'espace $\mathrm{H}^{1/2}(\Gamma_d)$. Pour les physiciens c'est l'espace des forces de surface sur Γ_d. Dès lors, le problème de minimisation sous contraintes (VI.19) est remplacé par un problème de minimisation sans contrainte sur l'espace

$$W(\Omega, \Gamma_d) = \mathrm{H}^1(\Omega) \times \mathrm{H}^{-1/2}(\Gamma_d)$$

Le nouvel objectif est de trouver le couple $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\chi})$ tel que

$$(\mathbf{u}, \boldsymbol{\chi}) \in W(\Omega, \Gamma_d), \quad \text{et} \quad L(\mathbf{u}, \boldsymbol{\chi}) = \inf_{(\mathbf{v}, \boldsymbol{\kappa}) \in W} L(\mathbf{v}, \boldsymbol{\kappa}). \tag{VI.20}$$

Autrement dit, le Lagrangien $L(\mathbf{v}, \boldsymbol{\kappa})$ est stationnaire pour le couple $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\chi})$. Ce qui donne les équations

$$\begin{cases} \langle \nabla \mathrm{V}(\mathbf{u}) \,|\, \mathbf{v} \rangle + \langle \boldsymbol{\chi} \,|\, \gamma_d(\mathbf{v}) \rangle_{\Gamma_d} = 0 & \text{pour tout } \mathbf{v} \in \mathrm{H}^1(\Omega) \\ \langle \boldsymbol{\kappa} \,|\, \gamma_d(\mathbf{u}) - \bar{\mathbf{u}} \rangle_{\Gamma_d} = 0 & \text{pour tout } \boldsymbol{\kappa} \in \mathrm{H}^{-1/2}(\Gamma_d) \end{cases}$$

[1] Dans le cas $\bar{\mathbf{u}} = 0$, qui correspond à un solide fixé sur sa surface Γ_d, l'ensemble $\mathcal{U}_0$, défini en (VI.17), a une structure d'espace vectoriel et l'inégalité d'Euler est remplacée par une égalité. Le problème de minimisation consiste donc simplement à annuler la dérivée de la fonctionnelle d'énergie potentielle, soit

$$k(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = f(\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{U}_0$$

soit encore

$$\begin{cases} k(\mathbf{u},\mathbf{v}) + \langle \boldsymbol{\chi} \,|\, \gamma_d(\mathbf{v}) \rangle_{\Gamma_d} = f(\mathbf{v}) & \text{pour tout } \mathbf{v} \in \mathrm{H}^1(\Omega) \\ \gamma_d(\mathbf{u}) = \bar{\mathbf{u}} & \text{sur } \Gamma_d \end{cases} \tag{VI.21}$$

Le terme $\boldsymbol{\chi}$ représente la force qui existe sur la surface de Dirichlet due aux déplacements $\bar{\mathbf{u}}$ qui lui sont imposés.

Solide en contact avec une fondation rigide

Suppossons maintenant que le solide puisse venir en contact avec une fondation rigide. Les conditions de contact établies en section 2 à l'équation (VI.10) peuvent être utilisées dans ce cas en considérant un des solides comme rigide. En l'absence de force de frottement sur la surface Γ_c du solide élastique, les conditions de contact sont alors les suivantes

$$\text{sur } \Gamma_c \begin{cases} G_{ap}(\mathbf{u}) \le 0 \\ \sigma_T = 0 \quad \sigma_n \ge 0 \\ \sigma_n . G_{ap} = 0 \end{cases} \tag{VI.22}$$

où $\gamma_n(\mathbf{u})$ représente le déplacement normal sur la surface de contact Γ_c. Le problème est maintenant de trouver un champ de déplacement $\mathbf{u}$ qui minimise l'énergie potentielle totale tout en respectant à la fois la condition de Dirichlet (VI.17) et les conditions de contact (VI.22). Mathématiquement, il faut résoudre le problème (VI.19) sur l'ensemble $\mathcal{U}$ de la forme

$$\mathcal{U} = \{\mathbf{v} \in \mathrm{H}^1(\Omega)\,; \quad \gamma_d(\mathbf{v}) = \bar{\mathbf{u}} \quad \text{sur } \Gamma_d \quad \text{et} \quad G_{ap} \le 0 \quad \text{sur } \Gamma_c\} \tag{VI.23}$$

Le Lagrangien associé à ce problème est une fonctionnelle de l'espace $\mathrm{H}^1(\Omega) \times \mathrm{H}^{-1/2}(\Gamma_d) \times \mathrm{N}$ dans l'ensemble $\mathbb{R}$, où N est l'ensemble des forces de surface positives qui peuvent agir sur Γ_c :

$$\mathrm{N} = \{q \in \mathrm{H}^{-1/2}(\Gamma_c)\,; \quad q \ge 0\}.$$

Ce Lagrangien s'écrit

$$L(\mathbf{v},\boldsymbol{\kappa},q) = \mathrm{V}(\mathbf{v}) + \langle \boldsymbol{\kappa} \,|\, \gamma_d(\mathbf{v}) - \bar{\mathbf{u}} \rangle_{\Gamma_d} + \langle q \,|\, G_{ap} \rangle_{\Gamma_c} \tag{VI.24}$$

Compte tenu des relations de Kuhn et Tucker (A.25) appendice A et de la dérivée (VI.7) de la fonction intervalle G_{ap} ce Lagrangien est stationnaire pour le triplet $(\mathbf{u},\boldsymbol{\chi},\sigma_n)$ qui vérifie

$$k(\mathbf{u},\mathbf{v}) + \langle \boldsymbol{\chi} \,|\, \gamma_d(\mathbf{v}) \rangle_{\Gamma_d} = \langle \sigma_n \,|\, v_n \rangle_{\Gamma_c} + f(\mathbf{v}) \qquad \forall \mathbf{v} \in \mathrm{H}^1(\Omega) \tag{VI.25}$$

$$\gamma_d(\mathbf{u}) = \bar{\mathbf{u}} \qquad \text{sur } \Gamma_d \tag{VI.26}$$

$$\langle q - \sigma_n \,|\, G_{ap}(\mathbf{u}) \rangle_{\Gamma_c} \le 0 \qquad \forall q \in \mathrm{N} \tag{VI.27}$$

où $v_n = \mathbf{v}.\mathbf{n}$ est la projection du déplacement virtuel $\mathbf{v}$ sur la normale sortante au solide rigide maitre (entrante dans le solide esclave).

3.2 Méthode de résolution du problème de contact statique

Formulation réciproque

Cette méthode consiste à calculer, à l'aide du noyau de Poisson du solide élastique, le champ de déplacement $\mathbf{u}$ à partir des deux premières équations (VI.25) et (VI.26) en considérant l'inconnue

σ_n comme un paramètre. Ce déplacement dépend naturellement aussi des forces de volume $\mathbf{f}$ et de surface $\mathbf{t}$ et de la condition de Dirichlet $\bar{\mathbf{u}}$. Il est donc possible d'écrire

$$\mathbf{u} = G\left(\sigma_n, \mathbf{f}, \mathbf{t}, \bar{\mathbf{u}}\right)$$

L'opérateur G étant un opérateur linéaire, la composante normale du déplacement sur Γ_c a donc la forme

$$u_n = G^n\left(\sigma_n\right) + \hat{u}_n\left(\mathbf{f}, \mathbf{t}, \bar{\mathbf{u}}\right) \tag{VI.28}$$

avec

$$\hat{u}_n\left(\mathbf{f}, \mathbf{t}, \bar{\mathbf{u}}\right) = \mathbf{n}.G(0, \mathbf{f}, \mathbf{t}, \bar{\mathbf{u}})$$

Cette méthode est facilement applicable lorsque l'intervalle entre les solides $G_{ap}(\mathbf{u})$ peut s'exprimer au premier ordre en fonction du déplacement $\mathbf{u}$. Ceci est rendu possible dans le cadre de l'approximation des petits déplacements en introduisant le jeu initial[2] noté $G_{ap}(0)$

$$G_{ap}(\mathbf{u}) \simeq G_{ap}(0) - u_n$$

En remplaçant ces expressions dans (VI.27), le problème de contact unilatéral est alors exprimé sous la forme d'une inégalité variationnelle, incluant l'opérateur de Green G^n :

$$\begin{cases} \text{trouver } \sigma_n \in \mathrm{N} \text{ tel que} \\ \langle q - \sigma_n \,|\, G^n(\sigma_n) - \hat{g_{ap}} \rangle_{\Gamma_c} \geq 0 \quad \forall q \in \mathrm{N} \end{cases} \tag{VI.29}$$

avec

$$\hat{g_{ap}} = G_{ap}(0) - \hat{u}_n\left(\mathbf{f}, \mathbf{t}, \bar{\mathbf{u}}\right) \tag{VI.30}$$

Puisque l'opérateur G est défini positif, l'inégalité variationnelle (VI.29) correspond à la minimisation, sur l'ensemble convexe N de la fonctionnelle

$$F : \mathrm{H}^{-1/2}\left(\Gamma_c\right) \to \mathbb{R}, \quad F(q) = \frac{1}{2}\langle G^n(q) \,|\, q \rangle_{\Gamma_c} - \langle \hat{g_{ap}} \,|\, q \rangle_{\Gamma_c}$$

L'avantage de cette formulation est de résoudre le problème de minimisation en ne mettant en jeu que des fonctions définies sur la surface Γ_c. Le nombre de degré de liberté nécessaire à l'approximation par éléments finis des équations se trouve donc considérablement réduit. De plus, l'inégalité variationnelle (VI.29) peut être résolue par une méthode de projection, puisque l'opérateur de projection sur l'ensemble N a une forme très simple (Cf. section 3.1 de l'annexe A). C'est l'objet de la méthode *SOR* (Successive Over Relaxation method) qui est une variante de la méthode d'Uzawa que nous allons décrire à la suite (voir aussi [40] et annexe A).

Méthode d'Uzawa

L'inégalité variationnelle (VI.29) est inchangée lorsqu'elle est multipliée par un nombre strictement positif ρ :

$$\sigma_n \in \mathrm{N} \quad \langle q - \sigma_n \,|\, \rho\left[G^n(\sigma_n) - \hat{g_{ap}}\right] \rangle_{\Gamma_c} \geq 0 \quad \forall q \in \mathrm{N}, \quad \rho > 0$$

Ajoutant et soustrayant σ_n

$$\langle q - \sigma_n \,|\, \sigma_n - \left(\sigma_n - \rho\left[G^n(\sigma_n) - \hat{g_{ap}}\right]\right) \rangle_{\Gamma_c} \geq 0 \quad \forall q \in \mathrm{N}, \quad \rho > 0$$

[2] Il est aussi possible d'exprimer la fonction intervalle en fonction de sa valeur au pas précédent dans un algorithme itératif. Le procédé peut donc être utilisé dans un autre cadre que celui des petits déplacements. En revanche, l'utilisation du noyau de Poisson nécessite une théorie linéaire de propagation.

il apparaît, d'après (A.14), que la solution σ_n est la projection sur l'ensemble convexe N du vecteur $\sigma_n - \rho\,[G^n(\sigma_n) - \hat{g_{ap}}]$:

$$\sigma_n = P_{\mathrm{N}}\big(\sigma_n - \rho\,[G^n(\sigma_n) - \hat{g_{ap}}]\,\big), \quad \rho > 0$$

Or l'opérateur de projection a la forme simple $P_{\mathrm{N}}\big(q(\mathbf{x})\big) = \min\{q(\mathbf{x}), 0\}$, $\mathbf{x} \in \Gamma_c$. La solution est donc

$$\sigma_n = \min\{\sigma_n - \rho\,[G^n(\sigma_n) - \hat{g_{ap}}]\,, 0\}, \quad \text{sur } \Gamma_c, \quad \rho > 0 \tag{VI.31}$$

Il est donc naturel de définir une méthode d'approximation, permettant de calculer σ_n : étant donné un élément arbitraire $\sigma_n^0 \in \mathrm{H}^{-1/2}(\Gamma_c)$, on définit la suite σ_n^k, pour $k \geq 0$, par

$$\sigma_n^{k+1} = \min\{\sigma_n^k - \rho\left[G^n(\sigma_n^k) - \hat{g_{ap}}\right], 0\}, \quad \rho > 0, \quad k \geq 0$$

Méthode *SOR* Notant que l'inégalité variationnelle (VI.29) est définie sur la surface de contact Γ_c, l'approximation par éléments finis de cette formulation devient

$$\mathbf{P} \in \mathrm{N}_h; \quad (\mathbf{Q} - \mathbf{P})^t(\mathbb{G}^n\mathbf{P} - \hat{\mathbf{G}}_{ap}) \geq 0 \quad \forall \mathbf{Q} \in \mathrm{N}_h \tag{VI.32}$$

avec

$$\mathrm{N}_h = \{\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{M_c}; \quad Q_i \leq 0, \quad 1 \leq i \leq M_c\} \tag{VI.33}$$

où M_c est le nombre total de noeuds de la surface de contact Γ_c. La procédure itérative devient dans ce cas discret : partant d'un vecteur $\mathbf{P}^0$ tel que $P_i^0 \leq 0$ pour $1 \leq i \leq M_c$, on définit la suite P_i^k, pour $k \geq 0$, par

$$\begin{aligned} P_i^{k+1/2} &= P_i^k - \rho\left[\mathbb{G}_{ij}^n P_j^k - (\hat{G}_{ap})_i\right], \quad \rho > 0 \\ P_i^{k+1} &= \min\{P_i^{k+1/2}, 0\}, \quad 1 \leq i \leq M_c \end{aligned}$$

Cependant pour un i donné, les valeurs P_j^{k+1}, avec $j < i$, sont déja calculées. Il apparaît donc plus judicieux d'incorporer ces valeurs plus précises dans le calcul de $P_i^{k+1/2}$ en décomposant

$$\mathbb{G}_{ij}^n P_i^k = \sum_{j=1}^{i-1} \mathbb{G}_{ij}^n P_j^k + \mathbb{G}_{ii}^n P_i^k + \sum_{j=i+1}^{M_c} \mathbb{G}_{ij}^n P_j^k$$

Ce qui permet de calculer la valeur intermédiaire $P_j^{k+1/2}$ par

$$P_i^{k+1/2} = (1-\omega)P_i^k - \frac{\omega}{\mathbb{G}_{ii}^n}\left(\sum_{j=1}^{i-1} \mathbb{G}_{ij}^n P_j^{k+1} + \sum_{j=i+1}^{M_c} \mathbb{G}_{ij}^n P_j^k - (\hat{G}_{ap})_i\right) \tag{VI.34}$$

en ayant posé $\omega = \rho\mathbb{G}_{ii}^n$.

Finalement la méthode *SOR* propose :

1. de partir d'un vecteur $\mathbf{P}^0$ tel que $P_i^0 \leq 0$ pour $1 \leq i \leq M_c$
2. de calculer $\mathbf{P}^{k+1}$ par

$$P_i^{k+1} = \min\{P_i^{k+1/2}, 0\}, \quad 1 \leq i \leq M_c \tag{VI.35}$$

   où le terme $P_i^{k+1/2}$ est obtenu par (VI.34),

3. et de continuer la procédure jusqu'à ce que le terme

$$\epsilon = \frac{\sum_{i=1}^{M_c} \left|P_i^{k+1} - P_i^k\right|}{\sum_{i=1}^{M_c} \left|P_i^{k+1}\right|} \tag{VI.36}$$

soit inférieur à une tolérance fixée (par exemple $\epsilon < 10^{-4}$).

Cette méthode de projection itérative, comme l'ont montré Glowinsky, Lions et Trémolières [41], converge lorsque $k \to \infty$ pour toute valeur de ω telle que $0 < \omega < 2$.

Exemple

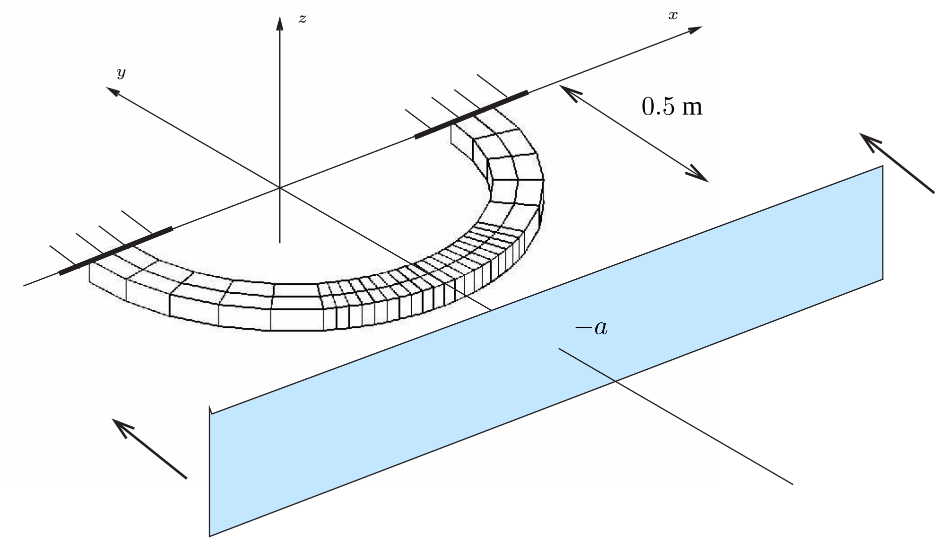


FIG. VI.3. **Ecrasement d'un demi cylindre** Un demi cylidre de rayon extérieur 0.5 m est écrasé par un obstacle rigide dont l'enfoncement est réglé par le paramètre a

La formulation variationnelle réciproque (VI.29) et la méthode de projection itérative sont utilisées pour résoudre le problème de contact statique d'un demi cylindre avec une fondation rigide. Considérons un demi cylindre, fixé sur le plan $y = 0$, d'épaisseur $e = 0.05$ m, et de rayon intérieur et extérieur valant respectivement $r = 0.4$ et $R = 0.5$ m (cf. figure VI.3). Son centre est fixé pour origine, son module d'Young vaut $E = 1000\ N/m^2$ et son coefficient de Poisson $\nu = 0.4$. La surface extérieure d'un cylindre est de la forme

$$y = \pm\sqrt{R^2 - x^2}, \quad -R \leq x \leq R, \quad -e \leq z \leq 0$$

Le cylindre peut être en contact sur la partie inférieure, Γ_c, de cette surface. La fonction ϕ qui caractérise Γ_c est

$$y = \phi(x) = -\sqrt{R^2 - x^2}, \quad -R \leq x \leq R$$

La normale à Γ_c sortante du demi cylindre est

$$\mathbf{n}(x) = \begin{cases} n_x(x) = \phi'/\sqrt{1+\phi'^2} = \frac{x}{R} \\ n_y(x) = -1/\sqrt{1+\phi'^2} = -\sqrt{1-(\frac{x}{R})^2} \\ n_z(x) = 0 \end{cases}$$

Le vecteur, **N**, perpendiculaire à la surface de la fondation est

$$\mathbf{N}(x) = \begin{cases} N_x(x) = 0 \\ N_y(x) = 1 \\ N_z(x) = 0 \end{cases}$$

Si la fondation rigide s'enfonce dans le solide élastique d'une distance $a > 0$, alors le jeu initial se calcul par

$$G_{ap}(0) = R\sqrt{1 - (\frac{x}{R})^2} - a$$

Dans ce cas, le déplacement $u_N(x)$ correspond au déplacement selon l'axe des y : direction de la normale sortante à la surface rigide (surface maitre).

Opérateur de Green Le déplacement sur la surface de contact Γ_c s'écrit

$$U_i = \mathbb{G}_{ij} F_j$$

où i parcourt l'ensemble Λ_c des degrés de liberté de Γ_c et j l'ensemble de degrés de liberté total Λ (sans compter les degrés de liberté liés à la surface de Dirichlet Γ_d). Pour exprimer le déplacement normal U_k^N, au kième noeud de Γ_c, on considère l'ensemble, Σ_c, des noeuds de Γ_c. Le problème étant à trois dimensions on obtient

$$\begin{aligned} U_k^N &= \left[G_{(3k-2)j} N_x(x_k) + G_{(3k-1)j} N_y(x_k) + G_{(3k)j} N_z(x_k)\right] F_j \\ &= G_{(3k-1)j} F_j, \quad k \in \Sigma_c, \quad j \in \Lambda \end{aligned}$$

En remarquant que les forces F_j qui s'exercent sur le système peuvent se décomposer en trois parties

1. les forces de volume F_j^{Ω}, j appartenant à l'ensemble Λ_{Ω}, des degrés de liberté "internes" du solide
2. les forces de surface F_j^T, j appartenant à l'ensemble Λ_T, des degrés de liberté de la surface $\Gamma - \Gamma_c - \Gamma_d$,
3. les forces de contact F_j^c, j appartenant à l'ensemble Λ_c, des degrés de liberté de la surface Γ_c,

on écrit le déplacement normal, U_k^N, sous la forme

$$\begin{aligned} U_k^N &= \sum_{j \in \Lambda_{\Omega}} \mathbb{H}_{kj} F_j + \sum_{j \in \Lambda_T} \mathbb{H}_{kj} F_j + \sum_{j \in \Lambda_c} \mathbb{H}_{kj} F_j \\ &= {}^{\Omega}U_k^N + {}^{T}U_k^N + {}^{c}U_k^N, \quad k \in \Sigma_c \end{aligned}$$

avec

$$\mathbb{H}_{kj} = \mathbb{G}_{(3k-1)j}, \quad k \in \Sigma_c, \quad j \in \Lambda \tag{VI.37}$$

De plus, puisque les forces de frottement tangentielles sont exclues, la force de contact au noeud l est un vecteur de la forme

$$\begin{cases} F_x = P_l n_x(x_l) \\ F_y = P_l n_y(x_l) \\ F_z = P_l n_z(x_l) = 0 \end{cases}$$

Si bien que le déplacement normal, ${}^{c}U_k^n$, dû aux forces de pression, **P**, sur Γ_c s'exprime par

$${}^{c}U_k^n = \sum_{j \in \Lambda_c} \mathbb{H}_{kj} F_j = \sum_{l \in \Sigma_c} \mathbb{C}_{kl} P_l, \quad k \in \Sigma_c$$

avec

$$\begin{aligned}\mathbb{C}_{kl} &= \mathbb{H}_{k(3l-2)} n_x(x_l) + \mathbb{H}_{k(3l-1)} n_y(x_l) \\ &= \mathbb{G}_{(3k-1)(3l-2)} n_x(x_l) + \mathbb{G}_{(3k-1)(3l-1)} n_y(x_l), \quad (k,l) \in \Sigma_c \end{aligned} \tag{VI.38}$$

Finalement la relation (VI.28) de la section précédente, donnant le déplacement normal sur Γ_c, a la forme numérique suivante

$$U_k^n = \sum_{j \in \Lambda_\Omega \cup \Lambda_T} \mathbb{H}_{kj} F_j + \sum_{l \in \Sigma_c} C_{kl} P_l, \quad k \in \Sigma_c \tag{VI.39}$$

où les matrices $\mathbb{H}$ et $\mathbb{C}$ sont calculées, à partir de $\mathbb{G}$, par les formules(VI.37) et (VI.38). L'ensemble des éléments nécessaires à la résolution du problème de contact par la méthode SOR sont maintenant réunis. Ainsi quelques résultats pour diverses indentations sont présentés aux figures VI.4 et VI.5.

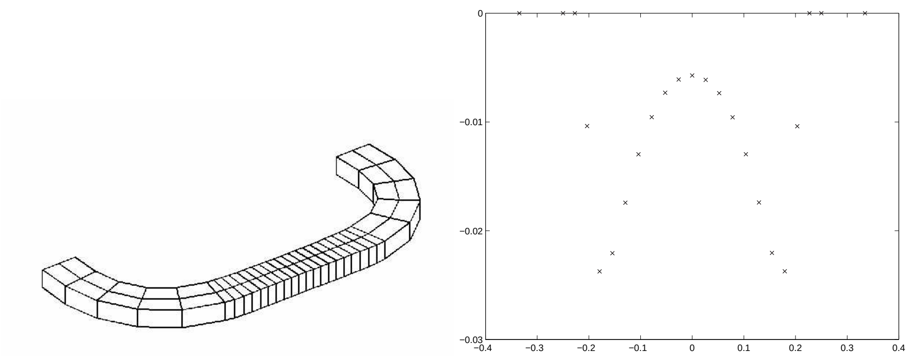


FIG. VI.4. **Ecrasement d'un demi cylindre** Ecrasement de 10 cm par un obstacle rigide plat et pression sur la surface de contact.

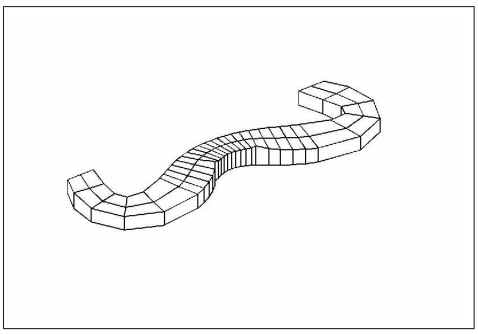


FIG. VI.5. **Indentation d'un demi cylindre** Indentation dû à l'enfoncement d'un rectangle rigide sur une distance de 30 cm.

Symétrie selon l'axe des z Si l'ensemble, Σ_c, des noeuds de la surface de contact Γ_c est ordonné en deux parties : les noeuds pour lesquels $z = 0$ suivis des noeuds pour lesquels $z < 0$, alors la matrice $\mathbb{C}$ a la forme symétrique suivante

$$\mathbb{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{12} & C_{11} \end{bmatrix}$$

Ce qui permet de chercher la pression de contact P seulement sur la moitié de la surface de contact en appliquant l'inégalité variationnelle (VI.32) : trouver $\mathbf{P}$ tel que

$$(\mathbf{Q}-\mathbf{P})^t(\mathbb{Z}\mathbf{P}-\hat{\mathbf{G}}_{ap}) \geq 0 \quad \forall \mathbf{Q}$$

sur l'ensemble $N_h' = \{\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{M_c/2}; \quad Q_i \leq 0, \quad 1 \leq i \leq M_c/2\}$, où M_c est le nombre total de noeuds de la surface de contact et $\mathbb{Z} = C_{11} + C_{12}$.

∼ ⋆ ∽

Les grandes lignes des résultats présentés dans ce chapitre existent déjà dans la littérature [40]. L'utilisation d'un noyau de Poisson calculé par la méthode modale constitue tout de même une originalité. Si ces résultats sont détaillés ici, c'est aussi pour préparer à la résolution de problèmes de contact en dynamique en utilisant la formulation réciproque.

VII

Contact en dynamique

(article de journal à comité de lecture)

Le contenu de ce chapitre a fait l'objet d'un article soumis en janvier 2003 à la revue : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* [42]. Il s'intitule "A reciprocal variational approach to the two-body frictionless contact problem in elastodynamics"

Comme le titre le laisse supposer, le contact entre deux solides élastiques sans frottement est étudié en utilisant une formulation réciproque. Le cas dynamique est quelque peu différent du cas statique dans la mesure où il existe en dynamique une condition de contact supplémentaire de manière à assurer la conservation de l'énergie. Cependant, comme dans le cas statique, chaque surface de contact est considérée comme une surface de Neumann pour laquelle est calculé le noyau de Poisson. La dérivée temporelle du noyau de Poisson est en fait un opérateur d'admittance qui permet d'exprimer la vitesse en fonction de la pression de contact. Grâce à cet opérateur, il est possible d'éliminer la vitesse dans les équations du mouvement et ainsi d'obtenir une équation intégrale ne portant que sur les surfaces de contact dont l'inconnue est la pression de contact. Comparé aux méthodes directes par différences finies, ce procédé permet d'envisager une économie en terme de temps de calcul pour des systèmes de grande taille.

INTERNATIONAL JOURNAL FOR NUMERICAL METHODS IN ENGINEERING
Int. J. Numer. Meth. Engng 2003 ;**00** :1-32 *Prepared using* nmeauth.cls

A reciprocal variational approach to the two-body frictionless contact problem in elastodynamics

J. Bensoam

Ircam, centre G. Pompidou, CNRS UMR 9912, Acoustic Instrumental Team,
1 place I. Stravinsky 75004 Paris, France
& L.A.U.M, CNRS UMR 6613, Université du Maine, Le Mans, France

This paper deals with the theoretical and numerical treatment of the unilateral dynamic contact problem between two arbitrary elastic bodies without friction. In addition to the classical variational statement that arises from static problems, a dynamic contact condition is needed and found by adjusting the balance laws of physical quantities to the impenetrability condition. In the context of infinitesimal deformation, a reciprocal formulation is then used to reduce this well-posed problem to one involving Green functions defined only on contact surfaces. It is then often possible to approximate the system using considerably fewer unknowns than with finite difference algorithms. The ability of the method to predict the contact interaction between two elastic bodies, irrespective of the material constitution and geometry, is highlighted by analytical and numerical simulations.

KEY WORDS : contact problems ; Signorini ; frictionless contact ; elastodynamics ; Green functions ; finite elements

INTRODUCTION

The general problem of the equilibrium of a linear elastic body in contact with a frictionless foundation was formulated by Signorini [43] in 1933, who presented a more complete account of his theory in 1959 [44]. The first rigorous analysis of a class of Signorini problems was published by Fichera [45]. The work of Fichera represents the first treatment of the question of existence and uniqueness of variational inequalities arising from the minimization of the total potential energy functional on a convex constraint set that expresses the impenetrability between the body and the foundation.

Since then, the solution of the classical Signorini problem has been shown to be also the solution of a variational inequality that arises naturally from the principle of virtual work. See, for instance, Oden and Kikuchi [40] who laid the mathematical framework for a variational statement of the Signorini's problem and took up the question of existence and uniqueness of solutions. They also provided interpretations of weak solutions and discussed their relationship to the classical solution. As customary, saddle point theory (Lagrange multipliers) or penalty formulations were used to handle the contact constraint and finite element approximations were developed.

All these studies refer to static elasticity. Several authors have attempted to find the numerical solution of dynamic contact problems using finite element methods. Among them it is important to mention the work of Hughes et al. [46] who presented a finite element formulation for linearly elastic contact-impact problems valid for perfect frictionless condition on the contact surface. Careful procedures, compatible with waves propagation theory, were used to enforce linear momentum balance when the impact or the release of the contact nodes occurs.

Duvaut and Lions [6] have investigated the frictional dynamic contact problem with prescribed normal tractions on the contact boundary and were able to prove existence and uniqueness of solutions. The frictional effects are included in the variational formulation through a non-differentiable functional which represents the virtual power of the friction force. As a consequence of this non-differentiability, this dynamic contact problem provides also an example of physical system subject to a governing variational inequality. Applications of the finite element method to solve this variational inequality, including error estimates and adapted algorithms, were presented by Martins and Oden [47].

For unilateral contact, a variational inequality was also formulated, (e.g. Panagiotopoulos et al. [48, 49]). By discretizing this inequality with respect to time and using a finite element method, these authors also obtained a solution of the dynamic unilateral contact problem by solving a static problem at each time step. In this case, the contact conditions are devised on individual configurations without much regard to the temporal variation of the contact kinematic measures. Taylor and Papadopoulos [50], in the 90's, have shown that standard semi-discrete time integrators are unsuccessful in modeling the kinematic contact imposed on the interacting bodies during persistent contact.They have bypassed this difficulty by devising a special treatment of contact/release conditions. Since then, Laursen et al. [38] demonstrated that this dynamic kinematic condition guarantees the energy conservation for frictionless contact and proposed a formulation of dynamic contact problems which enables an exact algorithmic conservation of the linear momentum, angular momentum, and energy in finite element simulations. The ability of the formulation to produce accurate results where more traditional integration schemes fail is emphasized by their numerical simulations.

Usually, the variational inequality is obtained by adding a constraint to the classical equation of motion. Conversely, in the static case, Fichera [45] or Oden and Kikuchi [40] showed that equations of motion with constraint can be derived from convex analysis and optimization theory. It is then natural to seek a functional which is to the dynamic context what the total potential energy functional is to the static context. The first section of this article is an attempt to show that the optimization of Hamilton's functional, on a constraint set that expresses the contact condition, can be used to obtain the formal statement of the two-body dynamic contact problem. In this framework, general non-linear programming methods are available and the problem can be formulated using saddle point theory where the Lagrange multiplier represents a contact pressure. To this purpose Taylor's procedure [50] is followed in the linear context.

Unfortunately, this statement is not sufficient since it is now clear that the energy balance must be considered to obtain a well-posed problem. In section 2, it is shown that the kinematic contact condition derived from the static one by Taylor [50] and postulated by Laursen [38] is in fact a consequence of the continuum mechanic balance laws and represents the way the energy is dissipated during contact.

Furthermore, in all the works mentioned above, finite-difference methods were used to integrate the resulting equations of motion. In section 3, the reciprocal formulation already used for static problems is applied to the dynamic context. This method involves the inverse of the *elasticity operator* appearing in standard variational statements of linear problems. One of the advantages of this method is that the awkward problem of discontinuities, which arises in contact problems, is already treated in the definition of this operator usually called *Green function*. Moreover, since the contact pressure only occurs at the contact surface, the problem itself reduces to one involving functions defined only on this surface. It is then often possible to approximate the system using considerably fewer unknowns than with classical finite-difference methods. At this point, it is important to mention that this method is only applicable to small strain elasticity problems where Green functions make sense. But the Green function can be considered as the first-order term of Volterra kernels expansion, and then futher investigations will be done to extend this algorithm to non-linear elastodynamic by using those kernels.

Section 4 is concerned with two dynamic contact examples. The first one is a collision bet-

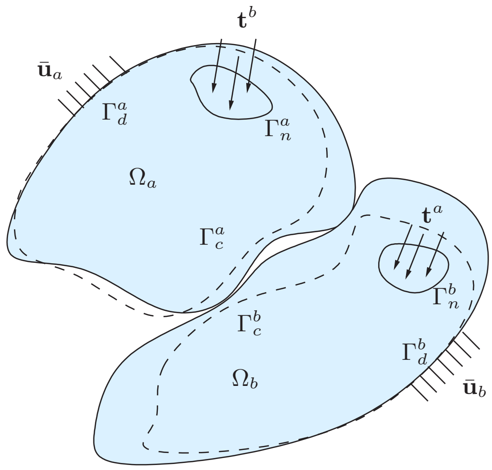


FIG. VII.1. Two elastic bodies (a) and (b) in their undeformed (dash line) and current (solid line) configuration. The actual surface on which the body (a) comes in contact with the other one is not known in advance but is contained in the portion Γ_c^a of its boundary.

ween two identical rods. In this one-dimensional case, an analytical solution is available and can be compared to numerical results. The second example exhibits nonlinear characteristics in the three-dimensional contact between two disk-shaped elastic bodies.

1 FORMAL STATEMENT OF THE PROBLEM

Formal statement of the problem

1.1 Geometry and conventions

We consider the two-body contact problem show on Fig. VII.1 where two bodies, (a) and (b), are expected to come into contact during the time interval of interest $[0, \tau]$. To simplify notations, a star $(\star)$ is used to represent indifferently body (a) or (b). Let $\Omega_\star$ be an open bounded subset of the three-dimensional Euclidean space $\mathbb{R}^3$ with a boundary $\partial\Omega_\star$. The set $\Omega_\star$ is occupied by an elastic body $B^\star$. A material point of $B^\star$ is represented by vector co-ordinate $\mathbf{X}^\star = (X_1^\star, X_2^\star, X_3^\star)$ in the undeformed (reference) configuration (doted line in Fig. VII.1) while, in the deformed (actual) configuration at time t, this particule is labeled by $\mathbf{x}^\star(\mathbf{X}^\star, t) = (x_1^\star, x_2^\star, x_3^\star)$ (solid line).

The material surface $\partial\Omega_\star$ of each body is decomposed as usual into three mutually disjoint parts $\Gamma_d^\star$, $\Gamma_n^\star$ and $\Gamma_c^\star$. On $\Gamma_d^\star$ (resp. $\Gamma_n^\star$) displacements $\bar{\mathbf{u}}^\star(t)$ (resp. tractions $\mathbf{t}^\star(t)$) are given. We denote by $\Gamma_c^\star$ a portion of body $(\star)$ which is a candidate contact surface. The actual surface on which a body comes into contact with the other one is not known in advance, but is contained in the portion $\Gamma_c^\star$ of $\partial\Omega_\star$. In addition, each body can be subjected to a body force $\mathbf{f}^\star(t)$ (such as gravity for instance).

The displacements of the bodies, relative to the fixed spatial frame, at time t, are represented by a function

$$\mathbf{u} : t \in [0, \tau] \longrightarrow \mathbf{u}(t) = (\mathbf{u}^a(t), \mathbf{u}^b(t)) \in \mathcal{E},$$

where $\mathbf{u}^\star(t)$ is the displacement field[1] of body $(\star)$ at time t and $\mathcal{E}$ the product of Sobolev spaces of

[1] The displacement of a material particule P labeled by vector $\mathbf{X}^\star$ is defined as

$$\mathbf{u}^\star(\mathbf{X}^\star, t) = \mathbf{x}^\star(\mathbf{X}^\star, t) - \mathbf{X}^\star.$$

each body

$$\mathcal{E} = (\mathrm{H}^1(\Omega_a))^3 \times (\mathrm{H}^1(\Omega_b))^3.$$

Throughout this study, standard indicial notation and summation convention are employed. Superposed dots $(\dot{})$ indicate differentiation with respect to time and commas $(\,)_{,k}$ denote partial differentiation with respect to x_k. Thus,

$$\dot{u}_i = \frac{\partial u_i}{\partial t}, \quad \ddot{u}_i = \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad u_{i,k} = \frac{\partial u_i}{\partial x_k}, \quad \text{etc}$$

1.2 Contact condition

The contact condition on the displacement field $\mathbf{u}$ of a linear elastic body in contact with a frictionless foundation is established by Oden and Kikuchi as

$$\mathbf{u}.\mathbf{n} \leq g_{ap}, \quad \text{on } \Gamma_c, \tag{VII.1}$$

where g_{ap} is a given function representing the normalized gap between the elastic body and the foundation and $\mathbf{n}$ is the outward unit vector normal to the contact surface Γ_c. The extension of this contact condition for Signorini problem to the two-body contact problem has also been achieved. The corresponding impenetrability condition is basically of the same form as the kinematic contact condition (VII.1), except that now the relative displacement field $\mathbf{u}^r = \mathbf{u}^a - \mathbf{u}^b$ is used to give

$$u_n^r \leq g_{ap}, \quad \text{on } \Gamma_c^a, \tag{VII.2}$$

where u_n^r is the normal component of the relative displacement on the contact surface Γ_c^a.

1.3 Hamilton's principle in elastodynamics and variational formulation

Hamilton's principle states that a dynamical system will move so that the time average of the difference, $\mathrm{T} - \mathrm{V}$, between kinetic and total potential energies will be an optimum. In order to be consistent with the static formulation where variational inequalities arise from the minimization of the total potential energy, we seek a minimizer of the Hamilton functional

$$\mathcal{J}(\mathbf{v}) = \int_0^\tau (\mathrm{V} - \mathrm{T})dt, \tag{VII.3}$$

on a constraint set that expresses the impenetrability condition (VII.2). In other word, the objective is to find a displacement $\mathbf{u}$ that minimizes the Hamilton functional $\mathcal{J}(\mathbf{v})$ on a constraint set $\mathcal{K}$. Mathematically,

$$\text{find } \mathbf{u} \in \mathcal{K} \text{ such that} \quad \mathcal{J}(\mathbf{u}) = \inf_{\mathbf{v}\in\mathcal{K}} \mathcal{J}(\mathbf{v}) \tag{VII.4}$$

The constraint set $\mathcal{K}$ depends on the physical problem and its definition plays an important role in the search of the extremum $\mathbf{u}$. For the two-body contact problem, we introduce the space $\mathcal{U}_{ad}$ of admissible displacements $\mathbf{v}$ which verify the Dirichlet conditions defined by

$$\mathcal{U}_{ad} = \{\mathbf{v} \in \mathcal{E} \mid \mathbf{v}^a = \bar{\mathbf{u}}^a \quad \text{on } \Gamma_d^a, \quad \mathbf{v}^b = \bar{\mathbf{u}}^b \quad \text{on } \Gamma_d^b\} \tag{VII.5}$$

The constraint set $\mathcal{K}$ consists of those displacement fields $\mathbf{v}$ which satisfy the kinematic contact condition (VII.2)

$$\mathcal{K} = \{\mathbf{v} \in \mathcal{U}_{ad} \mid v_n^r - g_{ap} \leq 0 \quad \text{on } \Gamma_c^a\} \tag{VII.6}$$

where $v_n^r = v_n^a - v_n^b$ is the normal component of the relative displacement on Γ_c^a. This set, $\mathcal{K}$, is not a linear space of $\mathcal{E}$, but a nonempty closed convex subset of $\mathcal{E}$. Thus, by Euler inequality [10], the two-body contact problem has the following variational form

$$\begin{cases} \text{find } \mathbf{u} \in \mathcal{K} \text{ such that} \\ \langle \nabla \mathcal{J}(\mathbf{u}) \,|\, \mathbf{v} - \mathbf{u} \rangle \geq 0, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{K} \end{cases} \tag{VII.7}$$

where $\langle \nabla \mathcal{J}(\mathbf{u}) \,|\, \mathbf{v} - \mathbf{u} \rangle$ is the *Gâteaux derivative*[2] of $\mathcal{J}$ at $\mathbf{u}$ in the direction $\mathbf{w} = \mathbf{v} - \mathbf{u}$.

According to (VII.3), a more explicit variational formulation can be built using the mathematical expressions of the kinetic and total potential energy of the two-body system. This yields to the variational inequality

$$\begin{cases} \text{find } \mathbf{u} \in \mathcal{K} \text{ such that, } \forall t \in [0, \tau] \\ m(\ddot{\mathbf{u}}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) + k(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) - f(\mathbf{v} - \mathbf{u}) \geq 0, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{K} \end{cases} \tag{VII.8}$$

where the traditional bilinear forms, defined from $\mathcal{E} \times \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$, for "mass" $m(.,.)$ and "stiffness" $k(.,.)$ respectively, have been introduced as follow

$$m(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{\star = a,b} \int_{\Omega_\star} \rho_\star u_k^\star v_k^\star \, dv, \quad k(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{\star = a,b} \int_{\Omega_\star} C_{klmn}^\star u_{m,n}^\star v_{k,l}^\star \, dv. \tag{VII.9}$$

The symbol $\rho_\star$ denotes the mass density of body $(\star)$ and C_{ijkl} are the components of the Hooke's tensor of elasticity, which possesses the standard symmetries. In formulation (VII.8), $f(.)$ is a linear function on $\mathcal{E}$ representing the virtual work produced by external forces (body forces $\rho_\star \mathbf{f}^\star$ and prescribed tractions $\mathbf{t}^\star$)

$$f(\mathbf{v}) = \sum_{\star = a,b} \left[\int_{\Omega_\star} \rho_\star \mathbf{f}^\star \cdot \mathbf{v}^\star \, dv + \int_{\Gamma_n^\star} \mathbf{t}^\star \cdot \mathbf{v}^\star \, ds \right].$$

1.4 Method of Lagrange multipliers

Constrained minimization problems can be reformulated as saddle point problems using the method of Lagrange multipliers (see Refs. [40] and [10]). Such formulation makes it possible to seek minima of functionals in linear spaces rather than closed convex sets. This is done by introducing, instead of the constraint set $\mathcal{K}$, the space $\mathcal{W} = \mathcal{E} \times \mathcal{Z} \times \mathcal{N}$ where

$$\mathcal{Z} = \mathrm{H}^{-1/2}\left(\Gamma_d^a\right) \times \mathrm{H}^{-1/2}\left(\Gamma_d^b\right) \tag{VII.10}$$

is the dual space of displacements on the Dirichlet surfaces while $\mathcal{N}$ is the admissible set for the Lagrange multipliers p_n defined by

$$\mathcal{N} \quad = \quad \{ p_n \in \mathrm{H}^{-1/2}\left(\Gamma_c\right) \;|\; p_n \leq 0 \quad \text{on } \Gamma_c^a \}. \tag{VII.11}$$

The set $\mathcal{N}$ is a subset of the dual space of displacements on Γ_c containing negative force. The minimization problem (VII.8) is then equivalent to the determination of the saddle point $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\chi}, \sigma_n) \in \mathcal{W}$ of the Lagrangian

$$\mathcal{L} : (\mathbf{v}, \boldsymbol{\kappa}, p_n) \in \mathcal{W} \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbf{v}, \boldsymbol{\kappa}, p_n) \in \mathbb{R}$$

[2]The *Gâteaux derivative* of $\mathcal{J}$, at $\mathbf{u}$ in the direction $\mathbf{v}$, is defined by

$$\langle \nabla \mathcal{J}(\mathbf{u}) \,|\, \mathbf{v} \rangle = \lim_{\theta \to 0} \frac{1}{\theta} \Big(\mathcal{J}(\mathbf{u} + \theta \mathbf{v}) - \mathcal{J}(\mathbf{u}) \Big).$$

defined by

$$\mathcal{L}(\mathbf{v},\boldsymbol{\kappa},p_n)=\mathcal{J}(\mathbf{v})-\int_0^{\tau}\left[\sum_{\star=a,b}\langle\boldsymbol{\kappa}^{\star}\,|\,\mathbf{v}^{\star}-\bar{\mathbf{u}}^{\star}\rangle_{\Gamma_d^{\star}}+\langle p_n\,|\,v_n^r-g_{ap}\rangle_{\Gamma_c}\right]dt \qquad \text{(VII.12)}$$

where $\langle\,.\,|\,.\,\rangle_{\Gamma_d^{\star}}$ and $\langle\,.\,|\,.\,\rangle_{\Gamma_c}$ are the duality pairing on $\mathrm{H}^{-1/2}\,(\Gamma_d^{\star})\times\mathrm{H}^{1/2}\,(\Gamma_d^{\star})$ and $\mathrm{H}^{-1/2}\,(\Gamma_c^{a})\times\mathrm{H}^{1/2}\,(\Gamma_c^{a})$ respectively. This saddle point satisfies the following equations and inequation

Find $(\mathbf{u},\boldsymbol{\chi},\sigma_n)\in\mathcal{W}$ such that

$$m(\ddot{\mathbf{u}},\mathbf{v})+k(\mathbf{u},\mathbf{v})=b(\mathbf{v}) \qquad \forall\mathbf{v}\in\mathcal{E} \qquad \text{(VII.13a)}$$

$$\sum_{\star=a,b}\langle\boldsymbol{\kappa}^{\star}\,|\,\mathbf{u}^{\star}-\bar{\mathbf{u}}^{\star}\rangle_{\Gamma_d^{\star}}=0 \qquad \forall\boldsymbol{\kappa}\in\mathcal{Z} \qquad \text{(VII.13b)}$$

$$\langle p_n-\sigma_n\,|\,u_n^r-g_{ap}\rangle_{\Gamma_c^a}\geq 0 \qquad \forall p_n\in\mathcal{N} \qquad \text{(VII.13c)}$$

where $b(\mathbf{v})$ represents the forces acting on solids (a) and (b)

$$b(\mathbf{v})=f(\mathbf{v})+\sum_{\star=a,b}\langle\boldsymbol{\chi}^{\star}\,|\,\mathbf{v}^{\star}\rangle_{\Gamma_d^{\star}}+\langle\sigma_n\,|\,v_n^r\rangle_{\Gamma_c^a}\,,\quad\forall\mathbf{v}\in\mathcal{E}. \qquad \text{(VII.14)}$$

The first equation (VII.13a) represents the principle of virtual work (power) applied to the bodies (a) and (b) subjected, on one hand, to external forces $f(\mathbf{v})$ and to reaction forces $\boldsymbol{\chi}^{\star}$ on their respective Dirichlet surface $\Gamma_d^{\star}$, and on the other hand, to a contact pressure σ_n normal to the contact surface Γ_c^a. Note the sign reversal in the contact pressure in (VII.14) according to Newton's third law,

$$\langle\sigma_n\,|\,v_n^r\rangle_{\Gamma_c^a}=\langle\sigma_n\,|\,v_n^a\rangle_{\Gamma_c^a}-\left\langle\sigma_n\,|\,v_n^b\right\rangle_{\Gamma_c^b}$$

($\mathbf{n}$ is the outward unit vector normal to Γ_c^a). The second equation (VII.13b) expresses the Dirichlet boundary conditions. Finally, the variational inequality (VII.13c) expresses the unilateral and frictionless contact condition on $\Gamma_c^{\star}$.

1.5 Equation of motion

Using the Green formula, the classical strong form of the two-body contact problem can also be obtained from the formulation (VII.13)

$$\rho_{\star}\ddot{u}_k^{\star}=\sigma_{kl,l}^{\star}+\rho_{\star}f_k^{\star} \qquad \text{in }\Omega_{\star}\times[0,\tau] \qquad \text{(VII.15a)}$$

$$\sigma_{kl}^{\star}n_l^{\star}=t_k^{\star} \qquad \text{on }\Gamma_n^{\star}\times[0,\tau] \qquad \text{(VII.15b)}$$

$$\left.\begin{array}{l}\sigma_{kl}^{\star}n_l^{\star}=\chi_k^{\star}\\ u_k^{\star}=\bar{u}_k^{\star}\end{array}\right\} \qquad \text{on }\Gamma_d^{\star}\times[0,\tau] \qquad \text{(VII.15c)}$$

$$\left.\begin{array}{l}u_n^r-g_{ap}\leq 0\\ \sigma_n\leq 0,\quad \boldsymbol{\sigma}_{T_k}^{\star}=0\\ \sigma_n(u_n^r-g_{ap})=0\\ \sigma_n=\sigma_{kl}^{\star}n_l^{\star}n_k^{\star}\\ u_n^r=u_n^a-u_n^b\end{array}\right\} \qquad \text{on }\Gamma_c\times[0,\tau] \qquad \text{(VII.15d)}$$

This step is not a straightforward exercise. In fact, it can be shown that any sufficiently smooth solution of (VII.8) or (VII.13) is also a solution of (VII.15). Conversely, taking $\mathbf{u}$ and $\mathbf{v}$ in the convex set $\mathcal{K}$, multiplying (VII.15a) by $v_k^{\star}-u_k^{\star}$ and integrating by parts over $\Omega_{\star}$, it is possible to obtain the variational inequality (VII.8) and consequently (VII.13). The relationship between the solution

of the variational inequality (VII.8) (or, equivalently (VII.13)) and the solution of the classical problem (VII.15) can be found in Ref. [40]. More precisely, these relationships are only established by Kikuchi and Oden [40] in the static context where inertial effects are not taking into account.

To our knwoledege, the question of existence and especially of uniqueness for the frictionless dynamic contact problems stated above is still open. Uniqueness of solution, in the dynamic context, is only proved by Duvaut and Lions [6] for frictional contacts assuming prescribed normal tractions. Their demonstration, based on energy considerations, can not be applied in our case where the normal unilateral traction is an unknown.

In fact, the two body contact problem is not yet well-posed since several solutions can be obtained from the variational statement (VII.8) or, equivalently (VII.13). Appendix 6.1 is an illustration of such a case.

2 DYNAMICAL CONTACT CONDITION

2.1 Energy dissipation during contact

As it is illustrated in appendix (6.1), any physically relevant solution of the contact problem has to be found by explicitely adressing the energy equation. How the energy is dissipated in the two-body contact problem ? To answer to this question, let us compute the total time rate of change in energy (kinetic T and internal W) by replacing the virtual velocity $\mathbf{v} \in \mathcal{E}$ by the real velocity $\dot{\mathbf{u}}$ in (VII.13a) to obtain

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d(T+W)}{dt} = b(\dot{\mathbf{u}})$$

where the linear form $b(\mathbf{v})$ is given by (VII.14). This variation of energy, according to the first principle of thermodynamics, balances the total supply of energy through external forces and heat : $\mathcal{P} + \mathcal{Q}$. According to (VII.14), it is clear that the rate of work of all external forces is

$$\mathcal{P} = f(\dot{\mathbf{u}}) + \sum_{\star=a,b} \langle \boldsymbol{\chi}^\star \,|\, \dot{\mathbf{u}}^\star \rangle_{\Gamma_d^\star} \,.$$

Thus, the heat energy, $\mathcal{Q}$, that enters the body per unit time is given by

$$\mathcal{Q} = \langle \sigma_n \,|\, \dot{u}_n^r \rangle_{\Gamma_c^a}$$

where $\dot{u}_n^r = \dot{u}_n^a - \dot{u}_n^b$ is the normal component of the relative velocity on Γ_c^a. In order to obtain a well-posed problem a new contact condition must be found specifying the value of this dissipation term. This the purpose of section 2. This condition is called the *dynamical contact condition* as it is not necessary for static problems.

2.2 Balance laws on the contact surface

The dynamical contact condition will be found by adjusting the balance laws[3] of physical quantities on the contact surface to the impenetrability condition (see Refs. [1, 2, 3, 4]). This condition, used in inequality (VII.2), can be also formulated by

Two bodies do not penetrate if the flux of mass through their separation surface Γ_c (see Fig. VII.2), of velocity $\mathbf{w}$, vanishes, i.e,

$$\rho_\star(\dot{u^\star}_k - w_k)n_k = 0 \quad \textit{on } \Gamma_c \tag{VII.16}$$

where $\rho_\star$ is the mass density of body $(\star)$ and $\mathbf{n}$ the unit vector normal to Γ_c outgoing from body (a).

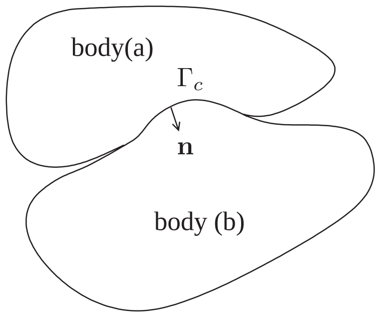


FIG. VII.2. The surface Γ_c is called contact surface or sliding surface.

According to this hypothesis, the balance laws of physical quantities give rise to the following properties on Γ_c

$$[\![\dot{u}_k]\!]_{\Gamma_c} n_k = \dot{u}_n^b - \dot{u}_n^a = -\dot{u}_n^r = 0 \qquad \text{mass conservation} \qquad \text{(VII.17a)}$$

$$[\![\sigma_{kl}]\!]_{\Gamma_c} n_l = 0 \qquad \text{momentum conservation} \qquad \text{(VII.17b)}$$

$$[\![\sigma_{kl}.\dot{u}_k]\!]_{\Gamma_c} n_l = [\![q_l]\!]_{\Gamma_c} n_l \qquad \text{energy conservation} \qquad \text{(VII.17c)}$$

$$[\![q_l]\!]_{\Gamma_c} n_l \geq 0 \qquad \text{2nd thermodynamic law} \qquad \text{(VII.17d)}$$

where $\boldsymbol{\sigma}$ is the Cauchy stress tensor and $\mathbf{q}$ the heat flux vector. The jump $[\![.]\!]_{\Gamma_c}$ is a spatial jump through the contact surface : these brackets indicate the difference of their enclosure at the surface Γ_c approached from the positive and negative sides of its positive normal, e.g., $[\![f]\!] \equiv f^+ - f^-$.

These balance laws refer to the current (deformed) configuration of the bodies (Eulerian configuration). For contact problems, the boundaries of the bodies are unknown at the outset and must be determined from the solution of differential equations. It is then convenient to employ a formulation based on the reference (undeformed) configuration where the boundary conditions are known (Lagrangian configuration). This provides a reasonable amount of simplicity in dealing with contact problems even though the field equations may be more complicated. Fortunately, within the infinitesimal deformation theory there will be no distinctions among Lagrangian and Eulerian forms of balance laws and jump conditions (see Ref. [1]).

According to (VII.17a), the velocity $\dot{\mathbf{u}}$ undergoes a discontinuity through Γ_c, but this discontinuity is purely tangential. Equation (VII.17b) stipulates that the stress vector is continuous through Γ_c. Decomposing the stress vector and the velocity into their normal and tangential components

$$\begin{aligned} \sigma_{kl} n_l &= \sigma_n n_k + \sigma_{T_k} \\ [\![\dot{u}_k]\!]_{\Gamma_c} &= ([\![\dot{u}_i]\!]_{\Gamma_c} n_i) n_k + [\![\dot{u}_{T_k}]\!]_{\Gamma_c}, \end{aligned}$$

the conservation of energy through the contact surface (VII.17c) yields, according to (VII.17b)

$$\sigma_n [\![\dot{u}_k]\!]_{\Gamma_c} n_k + \sigma_{T_k} [\![\dot{u}_{T_k}]\!]_{\Gamma_c} = [\![q_l]\!]_{\Gamma_c} n_l \geq 0 \quad \text{on } \Gamma_c \qquad \text{(VII.18)}$$

Taking into account the conservation of mass (VII.17a), this leads to the tangential contact condition

$$\sigma_{T_k} [\![\dot{u}_{T_k}]\!]_{\Gamma_c} = [\![q_l]\!]_{\Gamma_c} n_l \geq 0 \quad \text{on } \Gamma_c$$

and to the normal contact condition

$$\sigma_n [\![\dot{u}_k]\!]_{\Gamma_c} n_k = 0, \quad \text{on } \Gamma_c$$

[3] Conservation of mass, momentum, moment of momentum, energy and second thermodynamic law.

or, equivalently (since Γ_c can be replaced by Γ_c^a in the linear theory)

$$\langle \sigma_n \,|\, \dot{u}_n^r \rangle_{\Gamma_c^a} = 0 \tag{VII.19}$$

These conditions indicate that only tangential tractions can generate energy dissipation by friction between particles on the contact surface. In this article only frictionless contact problems are considered so $\sigma_T = 0$ on Γ_c, but the contact condition (VII.19) is still valid even if the contact is considered with friction.

According to the contact condition (VII.19) a non-zero traction may only be generated if the normal velocity $\dot{u}_n$ is continuous through the contact surface. In other words, during interaction the normal velocities of both bodies must be equal on the contact area, which is quite intuitive. This condition (VII.19) is sometimes called the persistency condition and it is of particular importance in the design of numerical algorithms for dynamic contact problems (see Laursen et *al* [51, 38, 52] and Taylor et *al* [50]).

In fact, the impact between portions of the boundaries of elastic bodies is expected to produce propagating stress and velocity discontinuities. Indeed, just before contact, the relative normal velocity $\dot{u}_n^r$ could be non-zero : this velocity must thus make a jump to vanish during contact. That is to say that at least one of the bodies endures a brutal change in its velocity in the direction normal to Γ_c. Thus, a particular attention must be dedicated to this additional difficulty.

3 DUAL FROMULATION

To compute a solution of the two-body contact problem in case of stress and velocity discontinuities we will prefer to use an integral representation with Green functions rather than finite difference algorithms such as Newmark and central difference schemes. This method is usually called reciprocal formulation as it involves the inverse of the *elasticity operator* appearing in standard variational statements of linear elastodynamic problems. This inverse operator is the Green function. One of the advantage of this method is that the awkward problem of discontinuities is already treated in the definition of the Green function without the complications of contact problems. Moreover, since the contact pressure occurs only on the contact surface Γ_c the reciprocal formulation uses functions defined only on this surface. It is then often possible to approximate the system using considerably fewer unknowns than with classical formulations and then save computational time.

To deal with integral representation using Green functions, it is convenient to first investigate some aspect of the unconstrained problem by considering one of the two bodies. This is the purpose of the next subsection where the mathematical tools needed for the reciprocal formulation will be defined. A semi-analytical method will also be described to compute those tools. In the following subsection 3.2, the reciprocal formulation will be applied to the two-body contact problem and this will lead to a very simple numerical algorithm described in subsection 3.3 and 3.4.

3.1 The unconstrained problem

Green and Poisson functions

For the time being, let us consider one of the two bodies, say body ($\star$) for example, and suppose that the contact pressure σ_n is a given prescribed traction on a $\Gamma_c^\star$. If the sources $\rho_\star \mathbf{f}^\star$, $\mathbf{t}^\star$ and the Dirichlet boundary condition $\bar{\mathbf{u}}^\star$ on $\Gamma_d^\star$ are also prescribed, the displacement field $\mathbf{u}^\star$, solution of the variational formulation (VII.13a-VII.13b) (written for one solid) is unique and can be expressed by

an integral representation (see Refs. [21, 36]) using Green and Poisson functions, namely

$$\begin{aligned} u_k^\star(\mathbf{x};t) &= \int_{\Omega^\star} G_i^k(\mathbf{x},\mathbf{y};t) * \rho_\star f_i^\star(\mathbf{y};t)\, dv_{\mathbf{y}} + \int_{\Gamma_n^\star} N_i^k(\mathbf{x},\mathbf{y};t) * t_i^\star(\mathbf{y};t)\, ds_{\mathbf{y}} \\ &+ \int_{\Gamma_c^\star} N_i^k(\mathbf{x},\mathbf{y};t) * \sigma_n(\mathbf{y};t) n_i(\mathbf{y})\, ds_{\mathbf{y}} + \int_{\Gamma_d^\star} D_i^k(\mathbf{x},\mathbf{y};t) * \bar{u}_i^\star(\mathbf{y};t)\, ds_{\mathbf{y}} \end{aligned} \quad \text{(VII.20)}$$

where the star $(*)$ denotes the convolution operation with respect to time. In this formula, the Green function $\mathbf{G}^k(\mathbf{x},\mathbf{y};t)$ is the solution of the variational unconstrained problem (VII.13a-VII.13b) with the sources

$$\rho_\star \mathbf{f}^\star = \delta(t)\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})\mathbf{e}_k, \quad \mathbf{x} \in \bar{\Omega}^\star, \quad \mathbf{y} \in \Omega^\star \quad \bar{\mathbf{t}}^\star = \bar{\mathbf{u}}_i^\star = \sigma_n = 0 \qquad \text{(VII.21)}$$

where $\mathbf{e}_k$ is k-th unit basis vector of $\mathbb{R}^3$. The Poisson functions $\mathbf{N}^k$ and $\mathbf{D}^k$ are the displacement fields corresponding to an impulsive source (force and displacement respectively) placed on the surface of the body. This yields, on the Neumann's surface Γ_n, to the Poisson function[4] $N^k(\mathbf{x},\mathbf{y};t)$ with the sources

$$\mathbf{t}^\star = \delta(t)\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})\mathbf{e}_k, \quad \mathbf{x} \in \bar{\Omega}^\star, \quad \mathbf{y} \in \Gamma_n^\star \quad \bar{\mathbf{f}}_k^\star = \bar{\mathbf{u}}_i^\star = \sigma_n = 0 \qquad \text{(VII.22)}$$

and, on the Dirichlet's surface, to the Poisson function $D^k(\mathbf{x},\mathbf{y};t)$ with the sources

$$\bar{\mathbf{u}}^\star = \delta(t)\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})\mathbf{e}_k, \quad \mathbf{x} \in \bar{\Omega}^\star, \quad \mathbf{y} \in \Gamma_d^\star \quad \bar{\mathbf{f}}_k^\star = \mathbf{t}^\star = \sigma_n = 0. \qquad \text{(VII.23)}$$

It is important to note that the integral representation (VII.20) has the same form for a point $\mathbf{x}$ in the domain $\Omega^\star$ or on the boundary $\partial\Omega^\star = \Gamma_n^\star \cup \Gamma_d^\star$. This is an alternative to the integral representation that uses the fundamental solution (free-space Green's function). In this case, a different expression exist depending on the position of the point field $\mathbf{x}$ (see Ref. [19]).

Modal theory

The major problem of reciprocal method is to find the Green and Poisson functions related to an elastic body. In practice only a few physical systems allow an analytical calculation of such functions. Discontinuities in the fields make difficult to compute pure numerical solutions of the unconstrained variational problem with impulse sources. Modal theory[5] gives an opportunity to compute semi-analytical function : the Green function $\mathbf{G}^k$ (and even the Poisson $\mathbf{N}^k$) for any point $\mathbf{x}$ and time t may be represented by a normal-mode expansion

$$\mathbf{G}^k(\mathbf{x},\mathbf{y};t) = \sum_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{\phi}_n^\star(\mathbf{x}) a_n(\mathbf{y};t) \qquad \text{(VII.24)}$$

where $\boldsymbol{\phi}_n^\star$ is the n-th mode of the body $(\star)$. Substitution of the series representation into the variational formulation (VII.13a-VII.13b) with the convenient choice of $\mathbf{v} = \boldsymbol{\phi}_m^\star$ gives an ordinary differential equation which can be solved analytically by Laplace transform method. This yields to the Green function

$$\mathbf{G}^k(\mathbf{x},\mathbf{y};t) = \sum_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{\phi}_n^\star(\mathbf{x}) Y(t) \frac{\sin \omega_n t}{m_n \omega_n} \boldsymbol{\phi}_n^\star(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{e}_k, \quad \mathbf{x} \in \bar{\Omega}^\star, \quad \mathbf{y} \in \Omega^\star \qquad \text{(VII.25)}$$

[4] Same procedure can be done for the contact surface Γ_c.

[5] Althought Green functions are computed, in this article, by modal theory please note that other methods exist to obtain those kernels (finite difference algorithms, integral formalism ...).

where m_n and ω_n are respectively the modal mass and modal angular frequency associated to the n-th mode respectively and $Y(t)$ is the Heaviside function. A similar expression can be built for the Poisson function where the point $\mathbf{y}$ lie on the Neumann surface instead of being in the domain $\Omega_\star$

$$\mathbf{N}^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}; t) = \sum_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{\phi}_n^\star(\mathbf{x}) Y(t) \frac{\sin \omega_n t}{m_n \omega_n} \boldsymbol{\phi}_n^\star(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{e}_k, \quad \mathbf{x} \in \Omega^\star, \quad \mathbf{y} \in \Gamma_n^\star \tag{VII.26}$$

The Poisson function $\mathbf{D}^k$ can also be computed using normal-mode expansion. But, since the modes vanish on the Dirichlet surface $\Gamma_d^\star$, a more complicated approach must be used (see Ref. [53] for details).

3.2 Two-body contact problem

Applying this result to the variational constrained problem (VII.13), the displacement and the velocity on the contact surface can be expressed as functions of the contact pressure. The two-body contact problem is then reduced to the impenetrability (VII.13c) and to the dynamical contact condition (VII.19) with only one unknown : the contact pressure.

find $\sigma_n \in \mathcal{N}$, such that

$$\langle p_n - \sigma_n \,|\, G_d(\sigma_n) + \widetilde{g_{ap}} \rangle_{\Gamma_c} \geq 0, \qquad \forall p_n \in \mathcal{N} \tag{VII.27a}$$

and

$$\left\langle \sigma_n \,|\, G_v(\sigma_n) + \dot{\widetilde{u}}_n^r \right\rangle_{\Gamma_c} = 0 \tag{VII.27b}$$

where G_d and G_v

$$\begin{aligned} G_d(\sigma_n) &= \int_{\Gamma_c} N(\mathbf{x}, \mathbf{y}; t) * \sigma_n(\mathbf{y}; t)\, ds_{\mathbf{y}} \\ G_v(\sigma_n) &= \int_{\Gamma_c} \dot{N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; t) * \sigma_n(\mathbf{y}; t)\, ds_{\mathbf{y}} \\ \widetilde{g_{ap}} &= \widetilde{u}_n^r - g_{ap}. \end{aligned}$$

Let us see how this substitution is made. The normal displacement on the contact surface $\Gamma_c^\star$ of the body $(\star)$, $u_n^\star(\mathbf{x}; t) = u_k^\star(\mathbf{x}; t) n_k(\mathbf{x})$, have been decomposed as contact and external contributions

$$u_n^\star(\mathbf{x}; t) = u_{\text{cont.}}^\star(\mathbf{x}; t) + \widetilde{u}_n^\star(\mathbf{x}; t), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_c^\star.$$

In this way, the part of the displacement due to the contact pressure is

$$u_{\text{cont.}}^\star(\mathbf{x}; t) = \int_{\Gamma_c^\star} N_n^\star(\mathbf{x}, \mathbf{y}; t) * \sigma_n(\mathbf{y}; t)\, ds_{\mathbf{y}} \tag{VII.28}$$

where here, the Poisson function

$$N_n^\star(\mathbf{x}, \mathbf{y}; t) = n_i(\mathbf{y}) N_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}; t) n_k(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Gamma_c$$

represents the normal displacement at point $\mathbf{x} \in \Gamma_c^\star$ resulting from an impulse force applied, at time $t = 0$, at point $\mathbf{y} \in \Gamma_c^\star$ in the direction normal to $\Gamma_c^\star$.

The displacement, $\widetilde{u}_n^\star$, is a known function for a given set of external contributions $\rho_\star \mathbf{f}^\star, \mathbf{t}^\star$ and $\bar{\mathbf{u}}^\star$ and can be expressed, using (VII.20), by the integral representation

$$\begin{aligned} \widetilde{u}_n^\star(\mathbf{x}; t) = &\int_{\Omega^\star} G_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}; t) n_k(\mathbf{x}) * \rho_\star f_i^\star(\mathbf{y}; t)\, dv_{\mathbf{y}} \\ &+ \int_{\Gamma_n^\star} N_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}; t) n_k(\mathbf{x}) * t_i^\star(\mathbf{y}; t)\, ds_{\mathbf{y}} + \int_{\Gamma_d^\star} D_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}; t) n_k(\mathbf{x}) * \bar{u}_i^\star(\mathbf{y}; t)\, ds_{\mathbf{y}} \end{aligned}$$

In the same manor, normal velocity can be decomposed as contact and external contributions as follows

$$\dot{u}_n^\star(\mathbf{x};t) = \int_{\Gamma_c^\star} \dot{N}_n^\star(\mathbf{x},\mathbf{y};t) * \sigma_n(\mathbf{y};t)\, ds_{\mathbf{y}} + \widetilde{\dot{u}}_n^\star(\mathbf{x};t) \tag{VII.29}$$

where now, $\dot{N}_n^\star$ is the Poisson velocity function of body $(\star)$ which represents the normal velocity at point $\mathbf{x} \in \Gamma_c^\star$ resulting from the same excitation force as for the Poisson function. So, the relative normal displacement and velocity are functions of the contact pressure

$$u_n^r(\mathbf{x};t) \;=\; u_n^a - u_n^b = \int_{\Gamma_c} N(\mathbf{x},\mathbf{y};t) * \sigma_n(\mathbf{y};t)\, ds_{\mathbf{y}} + \widetilde{u}_n^r(\mathbf{x};t) \tag{VII.30}$$

$$\dot{u}_n^r(\mathbf{x};t) \;=\; \dot{u}_n^a - \dot{u}_n^b = \int_{\Gamma_c} \dot{N}(\mathbf{x},\mathbf{y};t) * \sigma_n(\mathbf{y};t)\, ds_{\mathbf{y}} + \widetilde{\dot{u}}_n^r(\mathbf{x};t) \tag{VII.31}$$

where $N(\mathbf{x},\mathbf{y};t) = N_n^a(\mathbf{x},\mathbf{y};t) + N_n^b(\mathbf{x},\mathbf{y};t)$ represents the relative Poisson function defined for $\mathbf{y}$ on the contact surface (the plus sign $(+)$ is due to opposite normal unit vectors $\mathbf{n}^a$ and $\mathbf{n}^b$). Finaly, these integral representations (VII.30) and (VII.31) have been replaced into the contact condition (VII.13c) and (VII.19) respectively to give the reciprocal variational problem (VII.27).

For static problems, the dynamic contact condition (VII.27b) does not exist and the reciprocal variational problem can be alternatively formulated as a constrained minimization problem, on the convex set $\mathcal{N}$, of the functional

$$F(p_n) = \frac{1}{2}\, \langle p_n \,|\, G_0(p_n) \rangle_{\Gamma_c} + \langle p_n \,|\, \widetilde{g_{ap}} \rangle_{\Gamma_c}$$

where $G_0(p_n) = \int_{\Gamma_c} N(\mathbf{x},\mathbf{y}) p_n(\mathbf{y})\, ds_{\mathbf{y}}$ and $N(\mathbf{x},\mathbf{y})$ is a time-independent Poisson function. An iterative scheme to obtain a solution of such a problem, using a variant of Uzawa's method, can be found in [40]. The dynamic problems are not so straightforward and the reciprocal formulation can be simplified using a time discretization that transforms convolutions into discrete sums.

3.3 Time discretization and algorithm

A time discretization of the two-body contact problem is obtained by introducing a partition of the time domain $[0,\tau]$ into M intervals of length Δt such that $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_M = \tau$, with $t_{k+1} - t_k = \Delta t$. In addition, the contact pressure σ_n is postulated, in this model, to be a succession of impulse forces such that

$$\sigma_n(\mathbf{x},t) \simeq \sum_{k=0}^{M} \sigma_n(\mathbf{x},t_k)\delta(t-t_k) \equiv \sum_{k=0}^{M} \sigma_n(\mathbf{x},k)\delta_k \tag{VII.32}$$

Thus the convolution that appears in formula (VII.30) can be replaced by the discrete sum

$$N(\mathbf{x},\mathbf{y};t) * \sigma_n(\mathbf{y};t) \simeq \sum_{l=0}^{k} N(\mathbf{x},\mathbf{y};k-l)\sigma_n(\mathbf{x},l)$$

and can be split, with respect to the contact pressure, into instantaneous[6] and historical terms

$$\sum_{l=0}^{k} N(\mathbf{x},\mathbf{y};k-l)\sigma_n(\mathbf{x},l) = N(\mathbf{x},\mathbf{y};0^+)\sigma_n(\mathbf{x},k) + \sum_{l=0}^{k-1} N(\mathbf{x},\mathbf{y};k-l)\sigma_n(\mathbf{x},l)$$

[6] Here $N(\mathbf{x},\mathbf{y};0^+)$ is in fact the jump $N(\mathbf{x},\mathbf{y};0^+) - N(\mathbf{x},\mathbf{y};0^-)$, but $N(\mathbf{x},\mathbf{y};0^-)$ is zero by causality.

Thus, the normalized distance between body (a) and (b), at time t_k, which should exist in absence of contact, can be evaluated by

$$\widehat{u}_n^r(\mathbf{x};k) = \widetilde{u}_n^r(\mathbf{x};k) + \int_{\Gamma_c} \sum_{l=0}^{k-1} N(\mathbf{x},\mathbf{y};k-l)\sigma_n(\mathbf{x},l)\,ds_{\mathbf{y}} \tag{VII.33}$$

This relative distance can be greater than the normalized gap function on a portion $\Gamma_c(k)$ of the candidate contact surface Γ_c (see the contact condition (VII.2)). If this surface is not empty, a contact occurs between the time t_{k-1} and t_k producing a pressure to avoid the penetration of the bodies. In order to obtain a very simple algorithm, the contact pressure is postulated to act at discrete time t_k (and not between t_{k-1} and t_k). In other word a small penetration[7] is tolerated. On the extended contact area $\Gamma_c(k)$, which varies on time, the particles velocities can be computed in the same way

$$\dot{u}_n^r(\mathbf{x};k) = \widehat{\dot{u}}_n^r(\mathbf{x};k) + \int_{\Gamma_c(k)} \dot{N}(\mathbf{x},\mathbf{y};0^+)\sigma_n(\mathbf{y};k)\,ds_{\mathbf{y}} \tag{VII.34}$$

where the velocity

$$\widehat{\dot{u}}_n^r(\mathbf{x};k) = \widetilde{\dot{u}}_n^r(\mathbf{x};k) + \int_{\Gamma_c} \sum_{l=0}^{k-1} \dot{N}(\mathbf{x},\mathbf{y};k-l)\sigma_n(\mathbf{x},l)\,ds_{\mathbf{y}} \tag{VII.35}$$

is a known function consisting of external and historical contributions and does not depend on the contact pressure at time t_k. Finally, according to the dynamical contact condition (VII.19), equation (VII.34) must vanish in order to create non-zero tractions and give the opportunity to calculate the contact pressure at time t_k by the integral equation

$$\int_{\Gamma_c(k)} \dot{N}(\mathbf{x},\mathbf{y};0^+)\sigma_n(\mathbf{y};k)\,ds_{\mathbf{y}} = -\widehat{\dot{u}}_n^r(\mathbf{x};k) \tag{VII.36}$$

The contact algorithm can be summarized as :

$$\left\{\begin{array}{ll}
\text{initialize } \sigma_n \text{ to } 0 \text{ for all } k \in [1,\text{sample-length}] & \\
\text{for } k = 1\ldots\text{sample-length} & \\
\quad \text{compute } \widehat{u}_n^r(k) & \text{by Eq. (VII.33)} \\
\quad \text{if } \widehat{u}_n^r(k) > G_{ap} \text{ then} & \\
\qquad \text{compute } \widehat{\dot{u}}_n^r(k) & \text{by Eq. (VII.35)} \\
\qquad \text{compute } \sigma_n(k) \text{ for positive relative velocity} & \text{by Eq. (VII.36)} \\
\quad \text{end} & \\
\quad k = k+1 & \\
\text{end} &
\end{array}\right. \tag{VII.37}$$

Note that the relative velocity $\widehat{\dot{u}}_n^r(k)$ is positive when a contact occurs between the bodies. But, since a small penetration is tolerated, a negative velocity could be computed and a positive contact pressure would be produced. To avoid such an error a test is done.

[7] This small penetration is not a restriction in the model : by calculating the exact moment of contact, an algorithm without any penetration can be built. This procedure slows down calculation without making real improvement and it is not chossen for ours applications.

3.4 Approximation and numerical analysis

A finite element approximation of the variational unconstrained problem (VII.13a-VII.13b) is now considered in order to compute the Green and Poisson function. Each domain $\bar{\Omega}^\star$ is partitioned into a mesh of finite elements $\bar{\Omega}_h^\star$ over which piecewise polynomial approximations of the displacement field $\mathbf{u}$ at each time are introduced. This process can lead to the construction of a family $\{\mathcal{E}_h^\star\}$ of finite-dimensional subspaces of each Sobolev space $\mathcal{E}^\star = (\mathrm{H}^1(\Omega_\star))^3$. Here h is an appropriate mesh parameter (typically h is the diameter of the largest element in the finite element mesh). The vector $\mathbf{u}_h^\star$ of $\mathcal{E}_h^\star$, finite-dimensional counterpart of the displacement vector $\mathbf{u}^\star$, can be expressed as

$$\mathbf{u}_h^\star(\mathbf{x},t) = \sum_{\alpha=1}^{N_h^\star} \mathbf{U}_\star^\alpha(t)\psi_\alpha^\star(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \bar{\Omega}_h^\star \quad \star = \text{a or b} \tag{VII.38}$$

where $\psi_\alpha^\star$ denote basis functions spanning $\mathcal{E}_h^\star$, and $N_h^\star$ is the total number of node of the finite element mesh $\bar{\Omega}_h^\star$. Since[8] $\psi_\alpha^\star(\mathbf{x}^\beta) = \delta_\alpha^\beta$ at a node $\mathbf{x}^\beta \in \bar{\Omega}_h^\star$, $\mathbf{U}_\star^\alpha(t) = \mathbf{u}_h^\star(\mathbf{x}^\alpha, t)$ holds. If the summation convention is extended to the case $a^\alpha b_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{N_h} a^\alpha b_\alpha$, the time derivatives of $\mathbf{u}_h^\star$ are

$$\dot{\mathbf{u}}_h^\star(\mathbf{x},t) = \dot{\mathbf{U}}_\star^\alpha(t)\psi_\alpha^\star(\mathbf{x}), \quad \ddot{\mathbf{u}}_h^\star(\mathbf{x},t) = \ddot{\mathbf{U}}_\star^\alpha(t)\psi_\alpha^\star(\mathbf{x})$$

The finite element method applied to the variational problem (VII.13a-VII.13b) makes it possible to compute, for each discrete time t_k and for each body $(\star)$, a matrix $\mathbb{N}^\star(k)$ using normal-mode expansion (VII.26). This matrix is an approximation of the Poisson functions $N^\star(\mathbf{x},\mathbf{y};t)$ of size $(M_c \times M_c)$ where M_c is the total number of nodal points on the candidate contact surface Γ_c. The matrix components $\mathbb{N}_{ij}^\star(.)$ is a discrete time function representing the displacement at node i due to an impulse force applied on node j.

At the third step of the contact algorithm (VII.37), the relative Poisson function $\mathbb{N} = \mathbb{N}^a + \mathbb{N}^b$ is used to compute the normal displacement, at time t_k, which should exist in absence of contact

$$\widehat{\mathbf{U}}_n^r(k) = \widetilde{\mathbf{U}}_n^r(k) + \sum_{l=0}^{k-1} \mathbb{N}(k-l)\mathbf{P}_n(l) \tag{VII.39}$$

where $\mathbf{P}_n$ represents the numerical approximation of the unknown contact pressure σ_n. In case of contact, the relative velocity

$$\widehat{\dot{\mathbf{U}}}_n^r(k) = \widetilde{\dot{\mathbf{U}}}_n^r(k) + \sum_{l=0}^{k-1} \dot{\mathbb{N}}(k-l)\mathbf{P}_n(l) \tag{VII.40}$$

is computed using a similar matrix $\dot{\mathbb{N}} = \dot{\mathbb{N}}^a + \dot{\mathbb{N}}^b$. This velocity is evaluated only on the time dependent surface $\Gamma_c(k)$ which is represented by a set Λ_k of nodal points in contact at time t_k. Finally, to solve the integral equation (VII.36), the relative velocity Poisson matrix $\dot{\mathbb{N}}$ is evaluated for $k = 0$, and leads, for each time t_k, to the linear system

$$\dot{\mathbb{N}}^{\Lambda_k}\mathbf{P}_n(k) = -\widehat{\dot{\mathbf{U}}}_n^r(k) \tag{VII.41}$$

where $\dot{\mathbb{N}}^{\Lambda_k}$ is the restriction of the matrix $\dot{\mathbb{N}}(0^+)$ to the set Λ_k. The solution $\mathbf{P}_n(k)$ of this linear system will give the possibility to continue the contact algorithm for time $k = k+1$.

[8] Here δ is the Kroeneker symbol

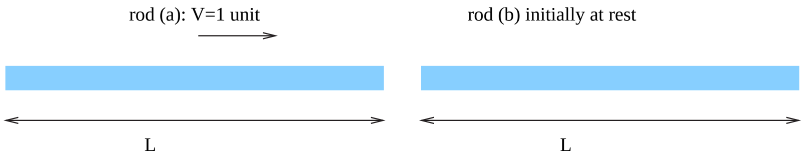


FIG. VII.3. Two identical rods, one initially stationary and the other moving with constant velocity $v = 1$ unit, contact each other at time $t = 0$.

4 NUMERICAL EXAMPLES

Two dynamic contact examples are presented in this section. The first one is a collision between two identical rods. This is a representative example which has been treated, at least, in three articles [46, 50, 38]. In this case, an analytical Poisson function is available and used to test the contact algorithm. A comparison is made between analytical and numerical results . The second example deal with a three-dimensional contact between two disk-shaped elastic bodies that exhibits nonlinear characteristics.

4.1 Impact between identical rods

Two identical rods, one initially stationary and the other moving with constant velocity $v = 1$ unit, come into contact at time $t = 0$ (see Fig. VII.3). The material and geometric properties for each rod are

- density $\rho = 1$ unit,
- cross-sectional area $A = 1$ unit,
- length $L = 10$ unit,
- Young's modulus $E = 1$ unit
- Poisson's ratio $\nu = 0$

Analytical results

For a rod of length L, the analytical Neumann Poisson function giving the displacement at point $x \in [0, L]$ that follow an impact at $x = 0$ and $t = 0$ is

$$N(0, x; t) = \frac{1}{\rho c}\left[Y(t - \frac{x}{c}) + \sum_{k=1}^{+\infty} Y(t + \frac{x - 2kL}{c}) + Y(t - \frac{x + 2kL}{c})\right]$$

where $c = \sqrt{\frac{EA}{\rho}}$ is the wave velocity in the rod (see Ref. [23]). In this case $c = 1$ unit. A time discretization of this analytical Poisson function and its time derivative, represented in Fig. VII.4(i), are used in the contact algorithm with a sample rate set to 100 Hz. The displacements, velocities and contact pressure, plot in Figs. VII.5(i) and VII.5(ii), fit the plots found in Taylor and Papadopoulos [50].

Numerical results

The rod is modeled by two-node, one-dimensional, linear elastic elements. A uniform mesh of 100 elements is considered and the sample rate is also set to 100 Hz. The two numerical Poisson functions (displacement and velocity), plot in Figs. VII.4(ii) and VII.4(iii), differ essentially from analytical ones (Fig. VII.4(i)) since they are computed using normal-mode expansion (VII.26) with

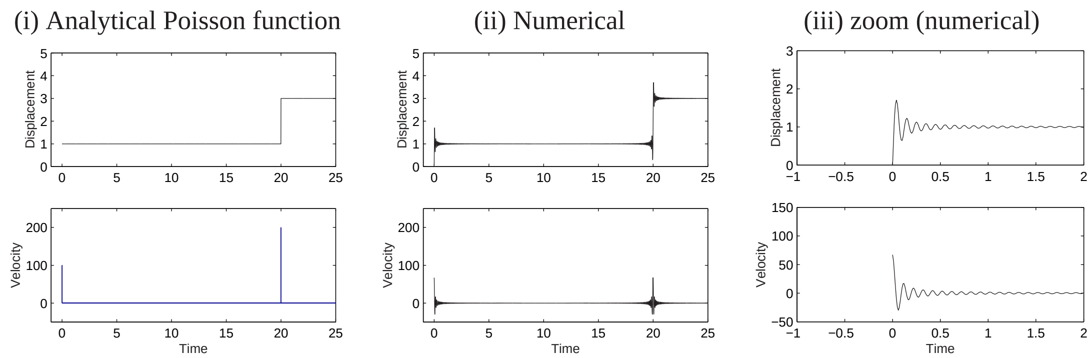


FIG. VII.4. (i) Time discretization of the analytical Poisson functions valid for rod (a) or (b). (ii) Numerical Poisson functions computed using normal-mode expansion and zoomed in subfigure (iii).

TAB. I. Material and geometric characteristics for the three-dimensional numerical example

	Elastic disks
Density	$\rho = 11.3\ 10^3$ Kg.m^{-3}
Young's modulus	$E = 10.4\ 10^6$ Pa
Poisson's ratio	$\nu = 0.37$
Dimensions	$R_{out} = 0.05$ m
Thickness	$e = 5\ 10^{-3}$ m
Initial gap	$h = 0.01$ m
Initial velocities (disk1)	$V_0 = 1$ m.s^{-1} and 6 m.s^{-1}

a number of modes restricted to the number of elements in the rod (i.e. 100). This truncation, in the infinite modal series, produces oscillations where accurate dicontinuities should exist (at time $t = 0$, $t = 20$ s, $t = 40$ s etc).

These numerical Poisson functions are used in the contact algorithm and the results are ploted in Fig. VII.5(iii) and zoomed in Fig. VII.5(iv). The Velocity artefacts are linked to the modal truncation. It is then clear that the errors seen in the numerical solution are correlated to the numerical approximations of the Poisson functions independently of the contact algorithm.

4.2 Three-dimensional numerical example

For curved contact surfaces, the unilateral behavior on the boundaries may have a substantial influence on the response of the structures : the structural systems, even in cases of linear elasticity and small deformations, exhibits nonlinear characteristics. A collision between two elastic disks is considered here as an illustration of such a phenomenon. An elastic disk, subjected to gravity, is dropped with two different initial velocities ($V_0 = 1$ m.s^{-1} and 6 m.s^{-1}) on an other disk clamped on its edges (see fig. VII.6). For each initial velocity, the contact algorithm uses the material and geometric characteristics given in table I to predict the temporal evolution of the two bodies by computing the distributed contact pressure. The figures VII.7 and VII.8 help to see the spatial pressure distribution on the contact surface. The nodes on the candidate contact surface of the ring are numbered from 1 to 17 according to Fig. VII.6. The contact surface extends itself for increasing impact velocity and provides a different behavior of the solids.

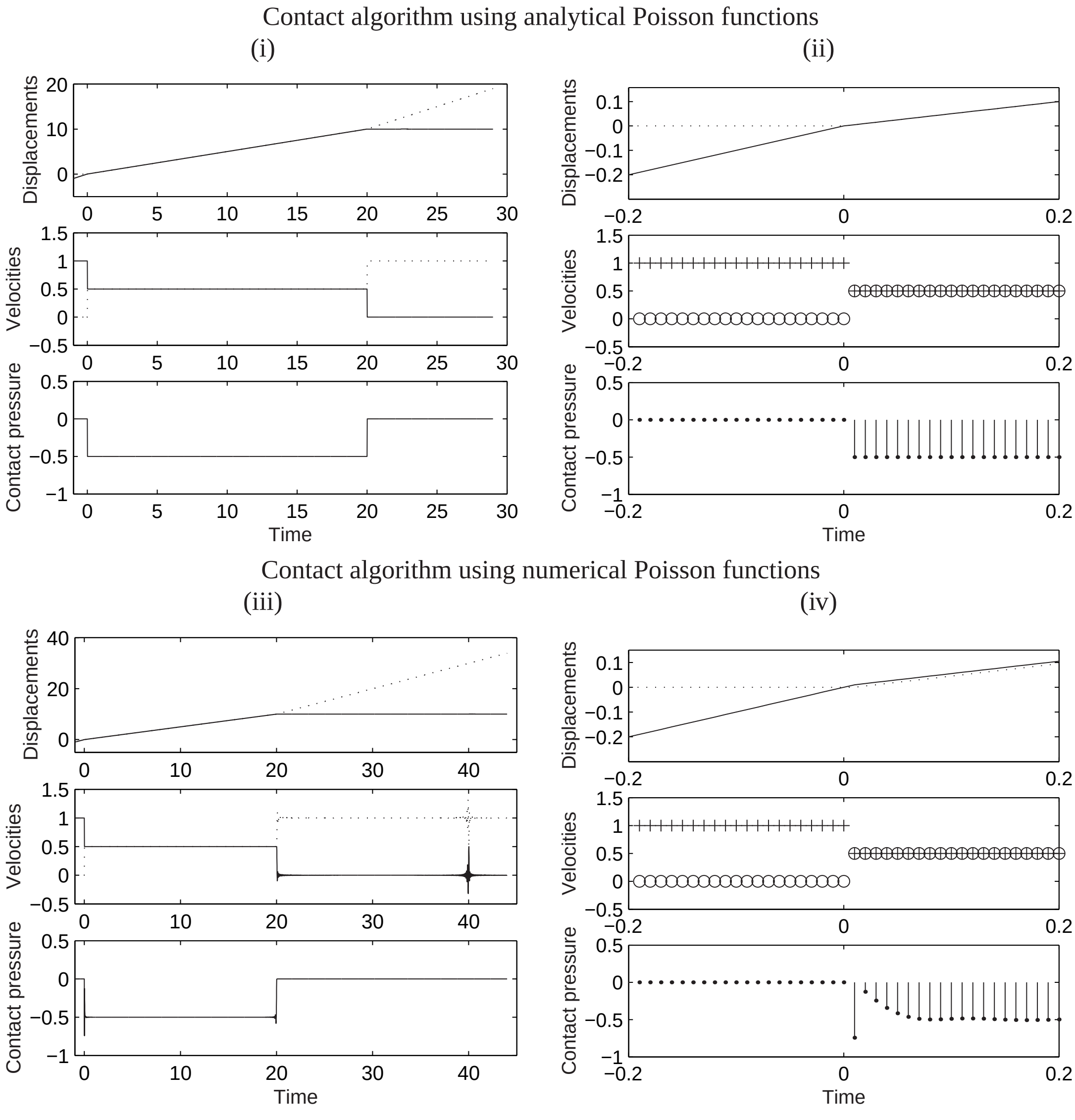


FIG. VII.5. Impact of identical rods. Subfigure (i) : contact algorithm predictions using analytical Poisson functions. Displacements, velocities and contact pressure at contact point of rod (a) (solid line) and rod (b) (dotted line). (ii) First 100 millisecond of interaction. In this model, the contact pressure σ_n is postulated to be a succession of impulse forces. (iii) Impact modeled by finite element method using numerical Poisson functions. The wave reflection at time $t = 20s$ and $t = 40s$ creates artifacts in the velocities. (iv) First 100 millisecond of interaction. A small penetration is observed in the displacement curves.

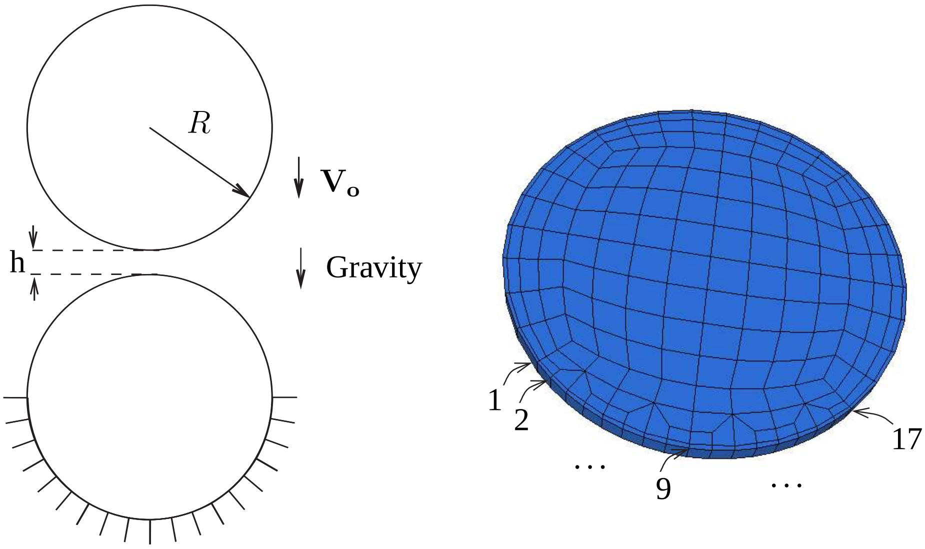


FIG. VII.6. An elastic disk is dropped on an other one clamped on its lowered hemisphere edges. The candidate contact nodes are numbered from 1 to 17.

5 DISCUSSION AND CONCLUSION

This work state a well-posed contact problem by taking into account the balance laws postulated in continuum mechanics. As a consequence in addition to the classical static contact condition, a dynamic condition, already postulated by Taylor [50] and Laursen [38], has been obtained *from* the fundamental physical principles and expresses the way the energy is dissipated during contact. This result contribute to a better basic understanding of contact constraints in the dynamic context. In addition, this condition, used here in a frictionless context, is still true for frictional contact problems. The perspective of this work is to extend this study to dynamical contacts with friction where both tangential and normal tractions have to be determined. To our knowledge this problem is still open.

As mention by Talaslidis and Panagiotopoulos [48], due to unilateral constraints, the estimation of the eigenvalue and eigenvector of the overall system is not possible. Nevertheless, in the present article and within the infinitesimal deformation theory, semi-analytical Green (or Poisson) functions are computed using individual mode expansion for each body. The treatment of wave propagation in the solids is then disconnected from the contact problem by itself and the reciprocal formulation is used in numerical computations reducing the number of unknown and giving a stable solution. As the first numerical example shows, the prediction capacity of the contact algorithm is restricted to the numerical quality of the Poisson function. Since this function is pre-processed, the computational time to solve the contact algorithm remain constant for any desired degree of approximation. Dissipative Green and Poisson functions arising from visco-elastic unconstrained problem are also considered in the contact algorithm. The result is a dissipative system with a dissipative-less contact.

The possibility to predict, with a reasonable computing time, the sound produced by the interaction of two elastic bodies irrespective of the material constitution and geometry constitute the major interest of this study. These accurate distributed contact simulations can also be used to derive the parameters of point-like non-linear phenomenological models usually used in sound synthesis.

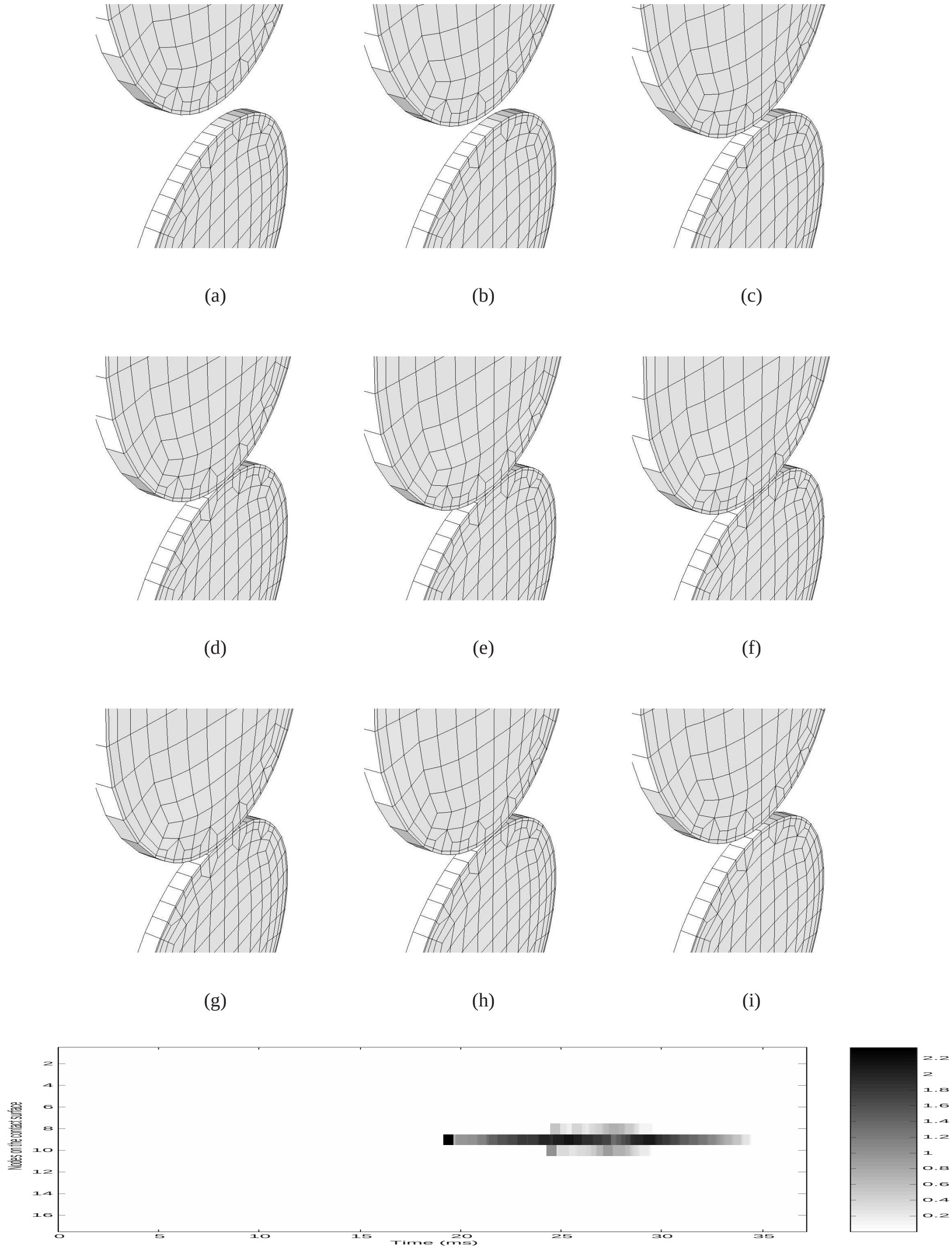


FIG. VII.7. Nine snapshops of a collision between two disks and contact force (in mPa) excerted on the contact surface for an initial velocity : $V_0 = 1$ m.s^{-1}. The contact surface is localized around the central node 9 and involves exceptionally the node 8 and symetric 10. The ninth node stay in contact.

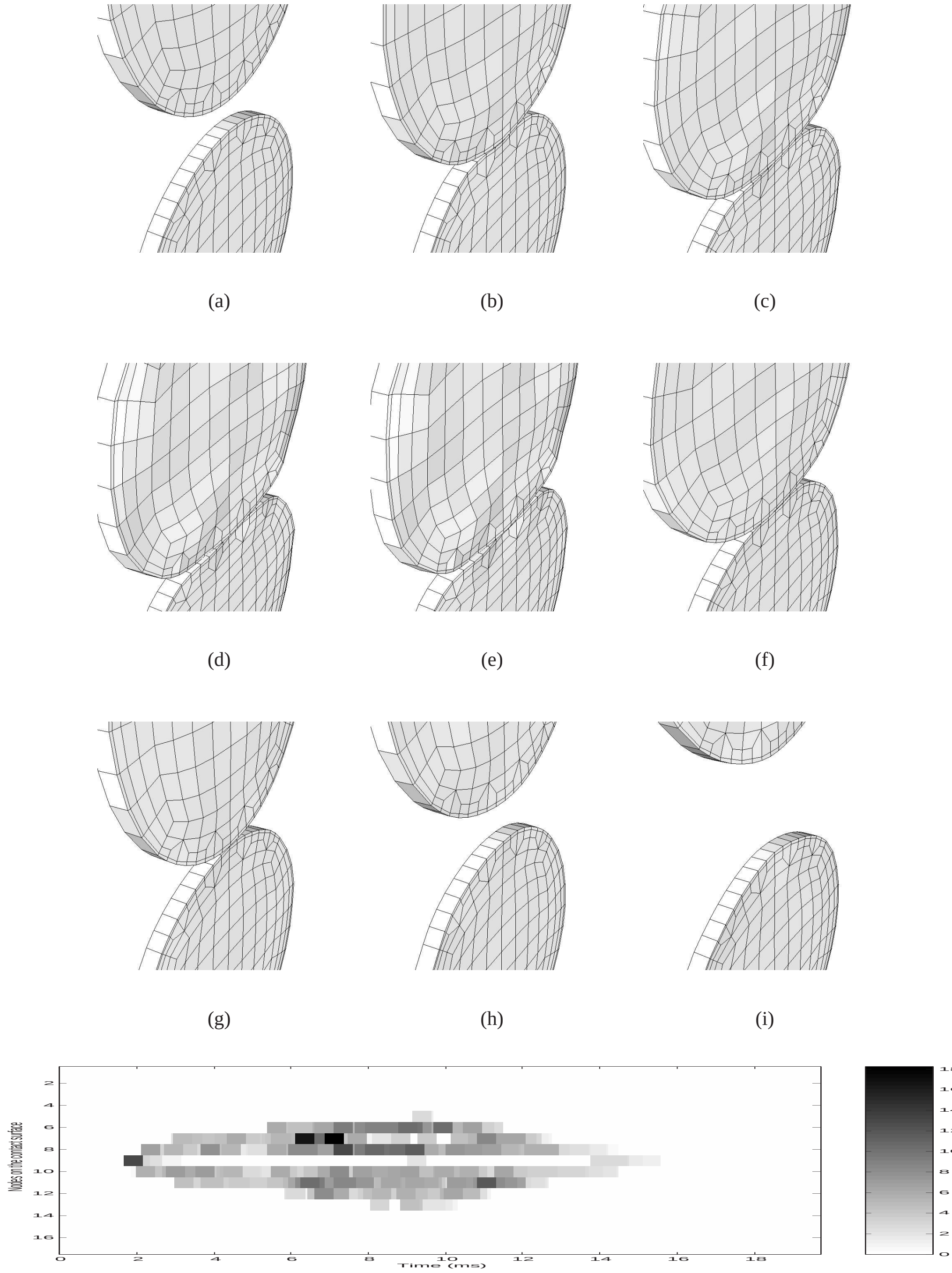


FIG. VII.8. Nine snapshops of a collision between two disks and contact force (in mPa) exerted on the contact surface for an initial velocity : $V_0 = 6$ m.s^{-1}. When the contact surface extends itself beyond the node 8 (and symmetric 10) the ninth node is no longer in contact and a gap appears (compare with Fig. VII.7)

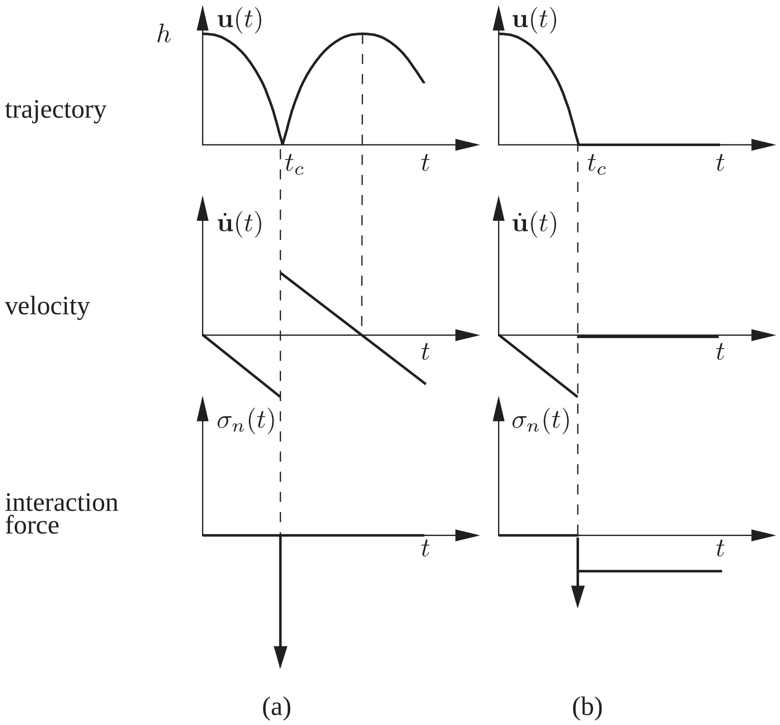


FIG. VII.9. Trajectory and velocity of a rigid body dropped on a rigid foundation for two different interaction forces. Case (a) : energy is conserved. Case (b) : the kinetic energy is lost at the first contact.

6 APPENDIX

6.1 ENERGY DISSIPATION DURING CONTACT

Let us take the simple example of a rigid body, of mass m, dropped from altitude h on a rigid foundation. In absence of strain, the variational formulation (VII.13) is reduced to

find $(\mathbf{u}, \sigma_n)$ such that

$$m\ddot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{v} + \sigma_n \cdot v_n \qquad \forall \mathbf{v} \tag{VII.42a}$$

$$(p_n - \sigma_n) \cdot u_n \geq 0 \qquad \forall p_n \leq 0 \tag{VII.42b}$$

where $P = mg$ is the weight of the solid and g the gravity constant. Figure VII.9 represents two possible configurations (trajectory, velocity) corresponding to two types of interaction between the body and the foundation.

case (a) The interaction force is an impulse force acting at time $t = t_c$ of magnitude $2mv_0$

$$\sigma_n(t) = 2mv_0\delta_{t_c}, \quad v_0 = -\sqrt{2gh}, \quad t_c = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

where v_0 is the velocity just before the impact time $t = t_c$ and δ the Dirac distribution. No dissipation occurs in this case.

case (b) The interaction force is also an impulse force but its magnitude is half the one of the first case. After time t_c, the interaction force remains constant and represents the weight of the body

$$\sigma_n(t) = mv_0\delta_{t_c} - Y(t - t_c)P.$$

Here Y is the Heaviside function. The kinetic energy is completely lost at the first contact, and then, the energy is dissipated.

In both cases, the momentum conservation, stated by the variational formulation (VII.42a), is satisfied in the sense of distributions. Moreover, since the product $\sigma_n u_n$ is always null, the formulation (VII.42b) is also checked (note that, the unit vector is directed, as it must be, toward the foundation). In fact, an infinity of solutions exists between these two configurations depending on the way the energy is dissipated during impacts.

7 QUELQUES REMARQUES SUPPLÉMENTAIRES

Pour clore ce chapitre quelques précisions s'imposent. Tout d'abord l'hypothèse des petits déplacements est quelque peu transgressée concernant l'exemple numérique tridimensionnel de la section 4.2. En effet, les déformations sont telles qu'il n'est pas vraiment légitime d'utiliser une formulation linéaire du problème (en particulier, les surfaces de contact Γ_c^a et Γ_c^b ne peuvent plus être raisonnablement considérées comme parallèles). Les caractéristiques des matériaux de la table I ont été choisies de manière à forcer le trait. Dans le cadre de l'élastodynamique linéaire, les déformations sont si faibles qu'il aurait été impossible d'obtenir une représentation graphique parlante à l'échelle unité.

D'autre part, il a été annoncé dans l'introduction de ce chapitre que la méthode employée permet de réduire le temps de calcul. Il convient de préciser cette affirmation en disant que le temps de calcul est en fait divisé en deux : le temps nécessaire au calcul des noyaux de Poisson et le temps consacré à l'algorithme de contact. Par rapport à une méthode classique par différences finies, l'algorithme de contact proposé ne porte pas sur l'ensemble des degrés de liberté du système mais sur un nombre réduit concernant uniquement les surfaces de contact ; la propagation dans les solides étant déjà prise en compte par le formalisme du noyau de Poisson. En revanche, on ne connait pas l'état du système, à chaque pas de temps, en dehors de la zone de contact. C'est donc là que l'économie, en terme de temps de calcul, est réalisée.

Il va sans dire que cette économie devient intéressante à partir d'un certain nombre de degrés de liberté. Pour un “petit” système, la segmentation des calculs est inutile. Quelle est donc cette limite ? Il est raisonnable de penser que cette limite est fonction du nombre de modes utilisés dans la synthèse et du nombre total de degrés de liberté du système. En effet, dans la pratique la convolution du noyau de Poisson avec la pression de contact, qui permet d'obtenir le déplacement et la vitesse sur l'ensemble des noeuds de la surface de contact, est réalisée par un banc de filtres d'ordre deux. L'état des surfaces de contact (déplacement-vitesse) est obtenue, à chaque pas d'échantillonnage, par l'addition des déplacements et vitesses modales comme l'illustre la figure VII.10. Il est donc possible d'estimer[9], pour chaque pas d'échantillonnage n, le nombre d'opération machine qu'il est nécessaire d'effectuer. Le schéma récursif d'un oscillateur d'ordre deux pour le mode i, soumis à une pression P, est le suivant

$$\begin{cases} u_n = \alpha_i u_{n-1} + \beta_i u_{n-2} + \delta_i P_{n-1} \\ \dot{u}_n = \alpha_i' \dot{u}_{n-1} + \beta_i' \dot{u}_{n-2} + \delta_i' P_{n-1} + \gamma_i' P_n, \end{cases} \tag{VII.43}$$

[9]Le temps de calcul de la pression de contact est essentiellement le même que l'on utilise cette méthode modale ou la méthode des différences finies. Il n'est donc pas inclu dans ces estimations comparatives.

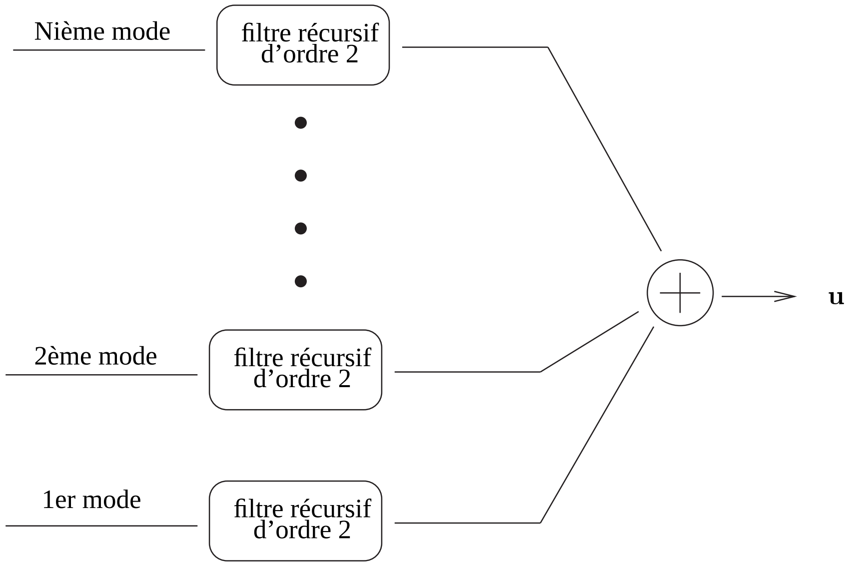


FIG. VII.10. **Synthèse modale** Dans la pratique la convolution du noyau de Poisson avec les sources est réalisée par un banc de filtres récursifs. A chaque filtre est associé un mode de vibration.

où les constantes α_i, α_i', β_i ...sont fonction[10] de la pulsation du mode considéré et de la fréquence d'échantillonnage (il convient de rappeller qu'il s'agit là, à l'approximation spatiale près, d'une solution temporelle exacte et qu'il n'est pas nécessaire d'utiliser un schéma d'ordre plus élevé). Pour calculer le déplacement et la vitesse en présence de pression de contact, il faut donc compter une dizaine d'opérations machine par mode et par noeud de la surface de contact. Ce qui permet d'évaluer le temps de calcul par échantillon à

$$T_c \simeq 10 N_m N_{\Gamma_c} \times T_{op},$$

où N_m, N_{Γ_c} sont respectivement le nombre de modes et le nombre de noeud sur la surface de contact. Le temps T_{op} est le temps nécessaire pour effectuer une opération élémentaire (addition ou multiplication). Il faut comparer cette estimation à un calcul par différences finies. Si N_{ddl} est le nombre total de degrés de liberté du système et que le schéma d'intégration numérique est aussi d'ordre deux, on peut estimer le temps de calcul par échantillon à

$$T_c' \simeq 10 N_{ddl} \times T_{op}.$$

La méthode utilisée ici devient donc intéressante à partir de

$$N_{ddl} \gtrsim N_m N_{\Gamma_c}.$$

Ce qui fixe la limite à $N_{ddl} \simeq 2000$ pour un système dont la surface de contact comporte 20 noeuds et pour lequel une centaine de modes a été utilisé. Ce qui revient à dire, dans ce cas, que la méthode modale est économique pour des solides comportant environ 300 noeuds dans leur maillage tridimensionnels respectif. À partir de cette limite le temps de calcul reste constant[11] puisque qu'il ne dépend pas du nombre de degrés de liberté total N_{ddl}.

[10] Eventuellement fonction aussi d'un coefficient d'amortissement modal.
[11] Le temps de calcul restant est absorbé dans le calcul des noyaux de Poisson.

Pour résumer, la représentation intégrale par noyau de Poisson devient plus économique à partir du moment où le temps de calcul de l'état du système (déplacement-vitesse) nécessaire à la résolution d'un problème est inférieur au temps de calcul requis par la méthode des différences finies. Dans le cas d'un problème de contact, l'état du système est complétement déterminé par l'état de la surface d'interaction. Une économie est donc réalisée en ne calculant que l'évolution temporelle de cette partie du système[12]. Le nombre de degrés de liberté complémentaires (i.e en dehors de la surface de contact) peut alors augmenter sans affecter le temps de calcul de l'algorithme de contact. En revanche, cette méthode nécessite un pré-calcul de la solution élémentaire propre à chaque domaine considéré.

À titre indicatif, l'algorithme de contact appliqué à l'exemple de la section 4.2 a été relancé pour calculer une seconde d'interaction. Le maillage de l'anneau comporte 192 noeuds soit 576 degrés de liberté (264 ddl pour l'autre solide). Compte tenu des caractéristiques du matériau avec le maillage proposé (cube de 1 cm de coté), il est possible d'analyser le système jusqu'à une fréquence $f_c = 1000$ Hertz. La fréquence d'échantillonnage vaut $f_e = 2 \times f_c$, soit $\Delta t = 5.10^{-4}$ s. Seuls les modes propres de fréquence propre inférieure à f_c sont retenus (98 modes pour l'anneau et 66 pour l'autre solide). La surface de contact comporte 18 noeuds de contact. Le Noyau de Poisson est calculé en moins d'une seconde pour chaque solide. Le temps de calcul pour une seconde de synthèse est de 71 s sur une machine ordinaire (400 MHertz) avec un programme écrit en *matlab* sans soucis d'optimisation.

[12] Ce qui est impossible en utilisant la méthode des différences finies.

Conclusion

Conclusion

Modalys est un logiciel de lutherie virtuelle et de synthèse sonore. Son idéal est de pouvoir prédire le son de n'importe quel type d'instrument quelles que soient sa forme et sa constitution matérielle. Cette exigence fixe un cadre de travail pour le concepteur d'un tel programme. Il ne doit pas seulement s'intéresser à un type d'instrument, le décrire puis prévoir son comportement, mais bien faire la part entre ce qu'il y a de commun à tout système producteur de son et ce qui peut être traité en tant que paramètre. Il doit aussi prendre en compte les contraintes musicales. Les processus de synthèse doivent être les plus courts possible de manière à réduire le laps de temps entre la pensée musicale et réalisation sonore effective. Et, ce souci d'efficacité ne doit pas se faire au détriment de la qualité.

Il est évidemment difficile d'apréhender dans une théorie unificatrice tous les systèmes producteurs de son. Il existe néanmoins des principes qui s'appliquent, en toute généralité, à des systèmes physiques de géométries et de constitution quelconques comme le montre le premier chapitre consacré à la mécanique des milieux continus. Cependant, ces principes sont insuffisants pour permettre une prévision de tous les phénomènes acoustiques et il faut, tôt ou tard, tenir compte de la nature physique du milieu étudié. Le cadre d'étude, le plus général qui soit, se doit donc de particulariser le milieu physique envisagé. Ne pouvant considérer tous les milieux de nature différente, nous avons choisi de nous intéresser à l'acoustique des milieux visco-élastiques en laissant de coté les milieux fluides ou gazeux.

Dans ce cadre, nous n'avons pris en compte qu'une loi de comportement linéaire de manière à concentrer nos efforts sur les problèmes aux limites qui sont déterminant dans les processus de résonance. Ainsi un système physique complexe est décrit par l'assemblage de solides couplés les uns aux autres et dont les interactions sont décrites par des conditions aux limites imposées à leur frontière.

Dans ces conditions, le comportement dynamique d'un de ces solides est régit par un ensemble d'équations qu'il est commode de présenter sous la forme d'une équation variationnelle. A ce titre, nous montrons les rapports qui existent entre les équations du mouvement et le principe d'optimisation de la fonctionnelle de Hamilton.

La solution mathématique de cette équation variationnelle est proposée sous la forme d'une solution intégrale où figurent explicitement les conditions aux limites et diffère quelque peu de la représentation intégrale traditionnelle utilisant la solution élémentaire de l'espace infini. Cette opération est rendue possible par l'introduction du noyau de Poisson vérifiant des condition aux limites bien précises sur la surface de l'objet considéré. Maints efforts ont été consentis dans la définition de cette solution élémentaire de manière à resoudre les paradoxes apparents qui se dressaient alors. Au terme de ce travail, le noyau de Poisson se révéle être un opérateur d'admittance ou d'impédance bien utile pour traiter les intéractions entre solides.

Il nous semble que l'introduction du noyau de Poisson est une réponse aux exigences de généralité et de rapidité d'un logiciel de synthèse sonore par modélisation physique. Son utilisation, dans les calculs, sépare la phase de conception de l'instrument de la synthèse sonore proprement dite.

La conception et la fabrication de l'instrument synthétique, comme l'instrument réel, demande du temps. Une fois réalisé et aussi complexe soit-il, l'instrument virtuel peut produire un son de qualité rapidement (voire en temps réel, avec la puissance des machines actuelles, lorsque le calcul est réalisé avec quelques dizaines de modes et quelques points de couplage).

Ce travail théorique est à l'origine d'un code de calcul numérique. D'abord écrit au laboratoire, il fait l'objet d'un développement informatique qui sera livré au public du forum de l'Ircam courant 2003. Au terme de ce travail de thèse, l'utilisateur de ce code informatique peut concevoir des objets sonores de formes arbitraires constitués de matériaux divers. Il peut aussi, avant de faire vibrer cet objet, lui faire subir de grandes déformations qui modifieront ces propriétés vibratoires. Enfin il peut coupler ces objets, soit par des assemblages permanents, soit par contact unilateral sans frottement.

Ces nouveaux objets et nouvelles possibilités viennent s'ajouter naturellement aux fonctionnalités du logiciel *Modalys*. Cependant ce logiciel a été conçu sans qu'il puisse être possible de modifier les données au cours du calcul. Le logiciel lis un fichier d'intructions puis exécute le calcul. De récents progrès en terme de temps calcul mettent aujourd'hui à l'ordre du jour la modification du programme pour le rendre interactif. Evidemment le travail est loin d'être achevé et de nombreuses autres perspectives s'imposent.

La synthèse des instruments, telle qu'elle est envisagée, ne prend pas en compte les effets du rayonnement. Le son synthétique correspond à la valeur d'un champ (déplacement, vitesse ou force) prédite à la surface des objets (voire à l'intérieur). Or, il est bien connu, que le son rayonné à distance d'un objet correspond, non seulement au rayonnement de chaque point de sa surface, mais aussi à l'interaction de cette surface avec le fluide environnant. Selon notre formalisme modulaire, il serait possible d'envisager ce problème par l'interaction de deux objets : le solide et le fluide. Cela nécessiterait de prédire le couplage mécano-acoustique sur l'ensemble de la surface du solide en resolvant une équation intégrale à chaque pas d'échantillonnage temporel. Cette méthode est donc très coûteuse. Il est préférable de concevoir le système solide-fluide comme un tout et de calculer le noyau de Poisson correspondant. C'est un calcul long mais effectué seulement une fois.

Le calcul du champ de pression rayonné par une plaque rectangulaire (encastrée, appuyée ou libre), composée d'un matériau élastique ou viscoélastique au contact d'air, en réponse à un impact élastique ou à une impulsion de Dirac a été étudié par Mattei et Habault [54]. Du fait de la géométrie particulière du problème, ils utilisent le noyau de Green du problème de Neumann pour le demi-espace dans les équations de couplage. Dans le cas d'une structure couplée à un fluide léger, les techniques de perturbation conduisent à une approximation du noyau de Poisson global.

A travers cet exemple, nous voyons que la démarche proposée est tout à fait envisageable. Pour des configurations géométriques plus complexes, il est nécessaire d'employer la méthode numérique des éléments de frontière décrite au chapitre III. Cette méthode comporte néanmoins des eccueils pratiques liés aux problèmes de convergence dans le domaine temporel ou de fréquences fictives dans le domaine fréquentiel [17] et doit faire l'objet d'un travail rigoureux.

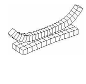
Ceci constitue une des perspectives de cette thèse, au même titre que l'étude du contact unilatéral avec frottement. A notre connaissance, les modèles les plus évolués calculent les forces tangentielles de contact en considérant la pression normale de contact comme une donnée du problème. Or, dans la réalité, c'est aussi une inconnue qu'il faut déterminer lors de l'interaction. En présence de dissipation par frottement la condition de contact dans la direction normale, établie au chapitre VII et qui fonde nos résultats, est toujours valable. Il est donc possible d'envisager un travail de recherche qui viserait à généraliser ces resultats en présence de frottement.

Devant l'ampleur du travail qui reste à effectuer, il est légitime de se demander quelles sont les motivations des recherches portant sur la synthèse sonore par modélisation physique. Car pour obtenir le son d'un instrument, la méthode la plus directe et la plus riche consiste à jouer d'un instrument réel. Alors pourquoi s'obstiner ?

C'est peut être en soulignant les correspondances qui existent entre les diverses techniques de synthèse sonore qu'un élément de réponse peut émerger. D'une certaine manière, tous les forma-

lismes calculent un noyau de Poisson qui est la carte d'identité sonore d'une structure élémentaire fixant son comportement dynamique lorsqu'elle est soumise à des actions extérieures. En effet, bien qu'il soit ici calculé sous la forme d'une combinaison linéaire de modes de vibration, le noyau de Poisson existe indépendamment de la théorie modale. Comme nous l'avons vu, cette solution élémentaire dépend du système étudié et il est possible de la calculer pour d'autres systèmes que les solides : pour une masse, pour un tuyau sonore, une salle de concert... Sous cet angle, il apparaît que les différents formalismes de synthèse sonore, décomposant un système complexe en sous-structures élémentaires et étudiant leurs propriétés acoustiques, ne sont pas si étrangers les uns des autres.

Cette thèse pourrait apparaître comme un long et fastidieux procédé déductif qui tire d'une théorie et de son cortège d'équations un ensemble de prévisions. Elle aimerait pourtant participer, elle aussi, à une quête dynamique qui entend épurer les phénomènes pour en extraire une véritable compréhension fondée sur ce que Bachelard appelle « un réalisme de seconde position, un réalisme en réaction contre la réalité usuelle, en polémique contre l'immédiat... la véritable pensée scientifique est métaphysiquement inductive ; elle lit le complexe dans le simple, elle dit la loi à propos du fait, la règle à propos de l'exemple... renforce ce qui transparaît derrière ce qui apparaît ».



Troisième partie

Annexes

A

Problèmes d'optimisation sous contraintes

INTRODUCTION

L'objet de l'optimisation est la construction d'algorithmes permettant d'approcher une solution du problème de la forme : trouver $\mathbf{u}$ tel que

$$\mathbf{u} \in \mathcal{U}, \text{ et } \quad \mathcal{J}(\mathbf{u}) = \inf_{\mathbf{v} \in \mathcal{U}} \mathcal{J}(\mathbf{v}), \tag{A.1}$$

où $\mathcal{U}$ est une partie donnée d'un espace vectoriel $\mathcal{E}$ et $\mathcal{J} : \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ une fonctionnelle donnée.

Les conditions nécessaires font généralement intervenir la dérivée première de la fonctionnelle $\mathcal{J}$; c'est le cas de l'équation d'Euler $\mathcal{J}'(\mathbf{u}) = 0$ lorsque $\mathcal{U} = \mathcal{E}$, où des inéquations d'Euler si $\mathcal{U}$ est convexe : $\mathcal{J}'(\mathbf{u})(\mathbf{v} - \mathbf{u}) \geq 0, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{U}$. Lorsque l'ensemble $\mathcal{U}$ est de l'une des formes suivantes :

– *contraintes égalités*

$$\mathcal{U} = \{\mathbf{v} \in \mathcal{E}; \varphi_i(\mathbf{v}) = 0, \quad 1 \leq i \leq m\}$$

ou

– *contraintes inégalités*

$$\mathcal{U} = \{\mathbf{v} \in \mathcal{E}; \varphi_i(\mathbf{v}) \leq 0, \quad 1 \leq i \leq m\}$$

la résolution du problème (A.1) fait intervenir les dérivées premières des fonctions φ_i, par l'intermédiaire des *multiplicateurs de Lagrange* dans le premier cas, ou par l'intermédiaire des *relations de Kuhn et Tucker* dans le second.

Remarque La plupart des résultats qui suivent sont établis sur des espaces vectoriels réels $\mathcal{E} = \mathbb{R}^n$. Cette présentation permet de dégager les concepts de l'optimisation qui pourront être étendus à des espaces vectoriels plus généraux et en particuliers aux espaces vectoriels de fonctions (champs acoustiques, champs de déplacement en élasticité ...) utilisés pour résoudre des problèmes de la physique.

1 DÉRIVÉE D'UNE FONCTIONNELLE

1.1 Définition

Pour minimiser une fonctionnelle sur un ensemble donné, on est souvent amené à tirer parti des propriétés de sa fonction dérivée. Dans le cas où la fonctionnelle est définie sur un espace vectoriel de fonctions, par exemple, la définition de la dérivée nécessite une généralisation de la notion de dérivée au sens usuel. Soit, donc, un ouvert Ω d'un espace vectoriel $\mathcal{E}$ et $\mathcal{J} : \Omega \subset \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ une fonctionnelle dérivable au "point" $\mathbf{u}$, tentons d'évaluer la dérivée de $\mathcal{J}'(\mathbf{u})$. Soit $\mathbf{v}$ un vecteur quelconque de $\mathcal{E}$, l'ensemble Ω étant ouvert il existe un intervalle ouvert I contenant 0 tel que la fonction

$$\phi : \theta \in I \to \phi(\theta) = \mathcal{J}(\mathbf{u} + \theta\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{E} \tag{A.2}$$

soit bien définie. L'application ϕ est dérivable par rapport à θ :

$$[\phi(\theta)]' = \phi'(\theta)\frac{d}{d\theta}(\mathbf{u} + \theta\mathbf{v}) = \mathcal{J}'(\mathbf{u} + \theta\mathbf{v}).\mathbf{v}$$

et vaut

$$\phi'(0) = \mathcal{J}'(\mathbf{u}).\mathbf{v} \tag{A.3}$$

pour $\theta = 0$. Puisque la dérivée de ϕ en 0 peut s'écrire

$$\lim_{\theta\to 0} \frac{\phi(\theta) - \phi(0)}{\theta} = \lim_{\theta\to 0} \frac{\mathcal{J}(\mathbf{u} + \theta\mathbf{v}) - \mathcal{J}(\mathbf{u})}{\theta}$$

on peut évaluer la dérivée de la fonctionnelle $\mathcal{J}$ par

$$\mathcal{J}'(\mathbf{u}).\mathbf{v} = \lim_{\theta\to 0} \frac{\mathcal{J}(\mathbf{u} + \theta\mathbf{v}) - \mathcal{J}(\mathbf{u})}{\theta}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{E} \tag{A.4}$$

ou encore dire que si $\mathcal{J}$ est dérivable en $\mathbf{u}$ alors

$$\mathcal{J}(\mathbf{u} + \theta\mathbf{v}) = \mathcal{J}(\mathbf{u}) + \theta\left(\mathcal{J}'(\mathbf{u})\mathbf{v} + \epsilon(\theta)\right), \quad \lim_{\theta\to 0} \epsilon(\theta) = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{E} \tag{A.5}$$

1.2 Dérivée d'une fonctionnelle quadratique

Les fonctionnelles quadratiques jouent un rôle important en physique car elles permettent de représenter l'énergie potentielle d'un système. Elles se mettent sous la forme

$$\mathcal{J} : \Omega \subset \mathcal{E} \to \mathcal{J}(\mathbf{v}) = \frac{1}{2}a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) - f(\mathbf{v}) \in \mathbb{R} \tag{A.6}$$

Si la forme $a(.,.)$ est bilinèaire, symétrique[1] et si la fonction f est linéaire, on peut calculer la dérivée de $\mathcal{J}$ selon (A.4). On a en effet

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\mathbf{u} + \theta\mathbf{v}) &= \frac{1}{2}a(\mathbf{u} + \theta\mathbf{v}, \mathbf{u} + \theta\mathbf{v}) - f(\mathbf{u} + \theta\mathbf{v}) \\ &= \frac{1}{2}a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + \theta a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - f(\mathbf{u}) - \theta f(\mathbf{v}) \\ &= \mathcal{J}(\mathbf{u}) + \theta\left[a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - f(\mathbf{v})\right] \end{aligned}$$

[1] c'est-à-dire que $a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = a(\mathbf{v}, \mathbf{u}), \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{E}$

d'où d'après (A.4)

$$J'(\mathbf{u}).\mathbf{v} = a(\mathbf{u},\mathbf{v}) - f(\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{E} \tag{A.7}$$

2 OPTIMISATION SANS CONTRAINTE

On appelle optimisation sans contrainte le problème : trouver $\mathbf{u}$ tel que

$$\mathbf{u} \in \mathcal{E}, \text{ et } \quad \mathcal{J}(\mathbf{u}) = \inf_{\mathbf{v}\in\mathcal{E}} \mathcal{J}(\mathbf{v}), \tag{A.8}$$

où $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel et $\mathcal{J} : \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ un fonctionnelle donnée.

2.1 Equation d'Euler

Démonstration

Si $\mathbf{u}$ est un minimun de la fonctionnelle $\mathcal{J}$ sur $\mathcal{E}$ alors, quel que soit le vecteur $\mathbf{v} \in \mathcal{E}$, le vecteur $\mathbf{u} \in \mathcal{E}$ doit vérifier :

$$\mathcal{J}(\mathbf{u} + \theta\mathbf{v}) \geq \mathcal{J}(\mathbf{u}), \quad \theta \in \mathbb{R}$$

Ce qui revient à dire, en reprenant la fonction ϕ définie en (A.2) que

$$\phi(\theta) \geq \phi(0), \quad \forall\theta \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{v} \in \mathcal{E}$$

et donc que

$$0 \leq \lim_{\theta\to 0^+} \frac{\phi(\theta) - \phi(0)}{\theta} = \phi'(0) = \lim_{\theta\to 0^-} \frac{\phi(\theta) - \phi(0)}{\theta} \leq 0$$

ce qui montre, d'après (A.3), que

$$\phi'(0) = \mathcal{J}'(\mathbf{u}).\mathbf{v} = 0$$

Comme le vecteur $\mathbf{v}$ est arbitraire, on en déduit que $\mathcal{J}'(\mathbf{u}) = 0$. Cette relation est appelée équation d'Euler.

Théorème

On en déduit que la solution $\mathbf{u}$ du problème d'optimisation sans contrainte (A.8) est telle que

$$\mathcal{J}'(\mathbf{u}) = 0 \tag{A.9}$$

Fonctionnelle quadratique

Dans le cas d'une fonctionnelle quadratique sur $\mathbb{R}^n$

$$\mathcal{J} : \mathbb{R}^n \to \mathcal{J}(\mathbf{v}) = \frac{1}{2}a(\mathbf{v},\mathbf{v}) - f(\mathbf{v}) \in \mathbb{R}$$

que l'on peut écrire sous la forme

$$\mathcal{J} : \mathbb{R}^n \to \mathcal{J}(\mathbf{v}) = \frac{1}{2}(\mathbb{A}\mathbf{v},\mathbf{v}) - (\mathbf{f},\mathbf{v})$$

où $\mathbb{A} \in \mathcal{A}_n$ est une matrice symétrique et $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^n$ un vecteur donné, la formule (A.7) nous permet d'écrire

$$\begin{aligned} \mathcal{J}'(\mathbf{u}).\mathbf{v} &= (\mathbb{A}\mathbf{u},\mathbf{v}) - (\mathbf{f},\mathbf{v}) \\ &= (\mathbb{A}\mathbf{u} - \mathbf{f},\mathbf{v}) \end{aligned} \tag{A.10}$$

et donc que $\mathcal{J}'(\mathbf{u}) = \mathbb{A}\mathbf{u} - \mathbf{f}$. Minimiser une fonctionnelle quadratique sur $\mathbb{R}^n$ revient donc à resoudre le système linéaire

$$\mathbb{A}\mathbf{u} = \mathbf{f}$$

3 OPTIMISATION AVEC CONTRAINTES

3.1 Inéquation d’Euler

convexité d’un ensemble

Une partie $\mathcal{U}$ d’un espace vectoriel $\mathcal{E}$ est dit convexe si, toutes les fois qu’elle contient deux éléments $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$, elle contient le segment fermé $[\mathbf{u}, \mathbf{v}]$ qui les joint. Les vecteurs qui appartiennent au

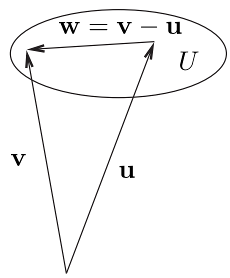


FIG. A.1. **Convexité dans** $\mathbb{R}^2$ Par exemple un sous espace vectoriel est convexe, une boule dans un espace vectoriel normé est convexe, une intersection quelconque d’ensembles convexes est convexe.

segment $[\mathbf{u}, \mathbf{v}]$ sont de la forme $\mathbf{u} + \theta\mathbf{w}$, $\theta \in [0, 1]$ avec

$$\mathbf{w} = \mathbf{v} - \mathbf{u}$$

Si $\mathcal{U}$ est convexe alors tous les éléments de la forme $\mathbf{u} + \theta\mathbf{w}$, $\theta \in [0, 1]$ sont encore dans $\mathcal{U}$. Alors, si $\mathbf{u}$ est le minimum relatif de la fonctionnelle $\mathcal{J}$ sur l’ensemble $\mathcal{U}$ on a

$$\mathcal{J}(\mathbf{u} + \theta\mathbf{w}) - \mathcal{J}(\mathbf{u}) \geq 0$$

La dérivabilité de la fonctionnelle $\mathcal{J}$ en $\mathbf{u}$ permet aussi d’écrire que

$$\mathcal{J}(\mathbf{u} + \theta\mathbf{w}) - \mathcal{J}(\mathbf{u}) = \theta\left(\mathcal{J}'(\mathbf{u})\mathbf{w} + \epsilon(\theta)\right), \quad \lim_{\theta \to 0} \epsilon(\theta) = 0, \quad \forall \mathbf{w} \in \mathcal{U}$$

Alors le nombre $\mathcal{J}'(\mathbf{u})\mathbf{w} = \mathcal{J}'(\mathbf{u})(\mathbf{v} - \mathbf{u})$ est nécesairement positif ou nul, sans quoi la différence $\mathcal{J}(\mathbf{u} + \theta\mathbf{w}) - \mathcal{J}(\mathbf{u})$ serait < 0 pour $\theta > 0$ suffisamment petit.

Théorème

On en déduit donc que la solution $\mathbf{u}$ du problème d’optimisation avec contrainte (A.1), sur un ensemble convexe $\mathcal{U}$, est telle que

$$\mathbf{u} \in \mathcal{U} \text{ et } \mathcal{J}'(\mathbf{u})(\mathbf{v} - \mathbf{u}) \geq 0, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{U} \qquad \text{(A.11)}$$

Remarque Si $\mathcal{U}$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{E}$, alors quels que soient $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{U}$, et $\theta \in \mathbb{R}$ les éléments $\mathbf{u} + \theta\mathbf{v}$ sont encore dans $\mathcal{U}$ par définition (θ peut maintenant prendre des valeurs en dehors de $[0, 1]$ et en particulier des valeurs négatives). Dans ces conditions, la démonstration utilisée à la section (2.1) est valable et permet d’affirmer que si $\mathbf{u}$ est solution du problème d’optimisation (A.1) alors :

$$\mathcal{J}'(\mathbf{u})\mathbf{v} = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{U} \text{ sous-espace vectoriel de } \mathcal{E} \qquad \text{(A.12)}$$

En particulier, si $\mathcal{U} = \mathcal{E}$ on retrouve la condition nécessaire $\mathcal{J}'(\mathbf{u}) = 0$

Opérateur de projection P

L'opérateur de projection permet d'interpréter l'inégalité d'Euler (A.11). Pour définir cet opérateur, on considère un sous-ensemble $\mathcal{U}$ non vide, convexe, fermé d'un espace de Hilbert $\mathcal{E}$. Etant donné un élément quelconque $\mathbf{w} \in \mathcal{E}$, il existe un et un seul élément $P\mathbf{w}$ tel que

$$P\mathbf{w} \in \mathcal{U} \text{ et } (P\mathbf{w} - \mathbf{w}, \mathbf{v} - P\mathbf{w}) \geq 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{U} \tag{A.13}$$

et réciproquement, si un élément $\mathbf{u}$ vérifie

$$\mathbf{u} \in \mathcal{U} \text{ et } (\mathbf{u} - \mathbf{w}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) \geq 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{U} \tag{A.14}$$

alors $\mathbf{u} = P\mathbf{w}$. Le vecteur $\mathbf{u}$ est la projection sur l'ensemble $\mathcal{U}$ de l'élément $\mathbf{w} \in \mathcal{E}$. Une interprétation géométrique des inégalités ci-dessus est donnée par la figure (A.2).

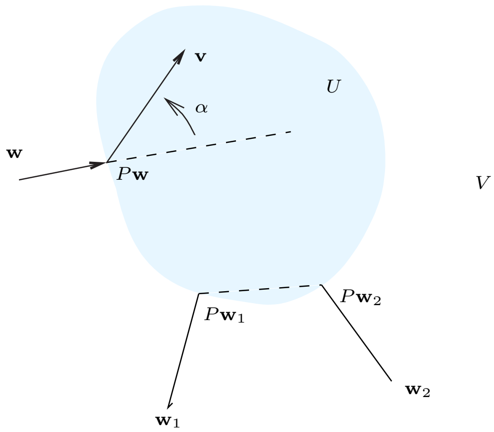


FIG. A.2. **Interprétation géométrique** L'angle α formé par les vecteurs $(P\mathbf{w} - \mathbf{w})$ et $(\mathbf{v} - P\mathbf{w})$ est inférieur à $\frac{\pi}{2}$.

Interprétation de l'inéquation d'Euler L'inéquation d'Euler est inchangée si on multiplie le vecteur $J'(\mathbf{u})$ par un nombre strictement positif $\rho > 0$:

$$\rho \mathcal{J}'(\mathbf{u})(\mathbf{v} - \mathbf{u}) \geq 0, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{U} \quad \rho > 0$$

Ajoutant et soustrayant le vecteur $\mathbf{u}$ on obtient une autre formulation de l'inéquation d'Euler

$$\Big(\mathbf{u} - [\mathbf{u} - \rho \mathcal{J}'(\mathbf{u})], \mathbf{v} - \mathbf{u}\Big) \geq 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{U} \quad \rho > 0 \tag{A.15}$$

Identifiant cette inégalité à la relation (A.14), il apparait que la solution $\mathbf{u}$ du problème d'optimisation avec contrainte (A.1), sur un ensemble convexe $\mathcal{U}$ est la projection sur $\mathcal{U}$ du vecteur $\mathbf{u} - \rho \mathcal{J}'(\mathbf{u})$

$$\mathbf{u} = P\Big(\mathbf{u} - \rho \mathcal{J}'(\mathbf{u})\Big) \quad \rho > 0 \tag{A.16}$$

Résolution numérique Autrement dit, la solution $\mathbf{u}$, apparaît, pour tout $\rho > 0$, comme un point fixe de l'application

$$g : \mathbf{v} \in \mathcal{E} \rightarrow P\Big(\mathbf{v} - \rho \mathcal{J}'(\mathbf{v})\Big) \in \mathcal{U} \subset \mathcal{E}$$

Il est donc naturel de définir une méthode d'approximation, permettant de calculer $\mathbf{u}$, appliquée à la fonction g : étant donné un élément $\mathbf{u}_0 \in \mathcal{E}$, on définit la suite $\mathbf{u}_k$, pour $k \geq 0$, par

$$\mathbf{u}_{k+1} = g(\mathbf{u}_k) = P\Big(\mathbf{u}_k - \rho \mathcal{J}'(\mathbf{u}_k)\Big), \quad k \geq 0$$

Sous certaines conditions cette méthode, appelée *méthode du gradient avec projection à pas fixe*, converge vers la solution du problème de minimisation (A.1). D'un point de vue numérique, cette méthode nécessite de pouvoir connaître l'opérateur de projection P sur une partie convexe fermée. Or, cet opérateur n'est pas connu explicitement en général. Un exception notable est celle des sous-ensembles $\mathcal{U}$ de $\mathcal{E} = \mathbb{R}^n$ de la forme $\prod_{i=1}^{n}[a_i, b_i]$. Par exemple si

$$\mathcal{U} = \mathbb{R}^n_+ = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n ; v_i \geq 0\}$$

la ième composante de la projection d'un élément quelconque de $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^n_+$ est $(Pw)_i =$ max$\{w_i, 0\}$, comme l'illustre la figure (A.3) dans le cas bi-dimensionnel.

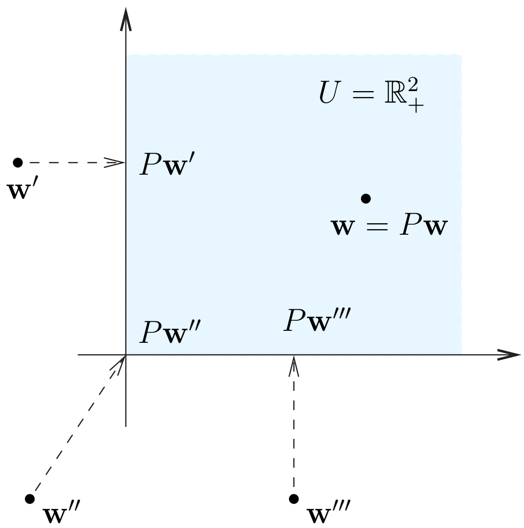


FIG. A.3. **Opérateur de projection** Ici de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2_+$.

Si $\mathcal{U} = \mathbb{R}^n_+$ est associé à une fonctionnelle quadratique du type

$$\mathcal{J} : \mathbb{R}^n \to \mathcal{J}(\mathbf{v}) = \frac{1}{2}(\mathbb{A}\mathbf{v}, \mathbf{v}) - (\mathbf{f}, \mathbf{v})$$

où $\mathbb{A} \in \mathcal{A}_n$ est une matrice symétrique et $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^n$ un vecteur donné, la ième composante u_i^{k+1} du vecteur $\mathbf{u}^{k+1}$ est calculée à partir de la composante u_i^k par les relations

$$u_i^{k+1} = \max\{u_i^k - \rho(\mathbb{A}\mathbf{u}^k - \mathbf{f})_i, 0\}, \quad 1 \leq i \leq n \tag{A.17}$$

Convexité d'une fonctionnelle

Soit $\mathcal{J} : \Omega \subset \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ une fonctionnelle dérivable sur un ouvert Ω d'un espace vectoriel $\mathcal{E}$, et $\mathcal{U}$ une partie convexe de Ω. La fonctionnelle $\mathcal{J}$ est convexe sur l'ensemble $\mathcal{U}$ si et seulement si

$$J(\mathbf{v}) \geq J(\mathbf{u}) + J'(\mathbf{u})(\mathbf{v} - \mathbf{u}) \tag{A.18}$$

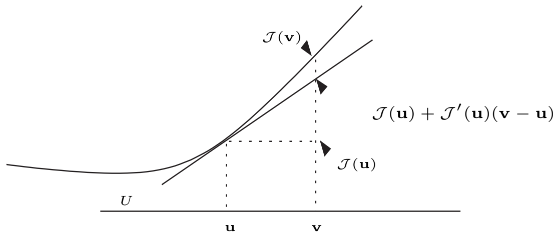


FIG. A.4. **Fonction convexe** Une fonction convexe est située "au-dessus" de son plan tangent.

L'interprétation géométrique est claire sur la figure (A.4) : la convexité exprime que la fonction "est située au-dessus" de son plan tangent. Une autre définition de la convexité de $\mathcal{J}$ s'obtient en reportant dans (A.18) la relation (A.5). Elle s'écrit

$$\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{U} \text{ et } \theta \in [0,1] \Rightarrow \quad J(\theta \mathbf{u} + (1-\theta)\mathbf{u}) \leq \theta J(\mathbf{u}) + (1-\theta) J(\mathbf{v})$$

Fonctionnelle quadratique

Si $\mathbf{u}$ est la solution du problème d'optimisation (A.1) et si $\mathcal{J}$ est une fonctionnelle quadratique du type (A.6), la propriété (A.7) :

$$J'(\mathbf{u}).\mathbf{v} = a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - f(\mathbf{v})$$

permet d'écrire l'inéquation d'Euler sous la forme

$$\mathcal{J}'(\mathbf{u})(\mathbf{v}-\mathbf{u}) = a(\mathbf{u}, \mathbf{v}-\mathbf{u}) - f(\mathbf{v}-\mathbf{u}) \geq 0, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{U} \tag{A.19}$$

et dans le cas où $\mathcal{U}$ est un sous-espace vectoriel

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = f(\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{U} \text{ sous-espace vectoriel de } \mathcal{E} \tag{A.20}$$

Et réciproquement, si $\mathbf{u}$ vérifie (A.19) (ou (A.20) selon le cas), alors c'est la solution du problème d'optimisation (A.1).

3.2 Minimisation avec *"contraintes égalités"*

Multiplicateurs de Lagrange

Interprétation géométrique de la méthode des multiplicateurs de Lagrange Considérons un problème de minimisation d'une fonction $\mathcal{J} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ avec la contrainte $\varphi(x_1, x_2) = 0$. La figure (A.5) représente la courbe décrite par la contrainte $\varphi(x_1, x_2) = 0$ dans le plan x_1, x_2 et les courbes de niveau définies par $\mathcal{J}(x_1, x_2) = cste$.

Il est clair que la solution de ce problème est le point d'intersection de la courbe $\varphi(x_1, x_2) = 0$ avec la courbe de niveau de $\mathcal{J}$ ayant la plus petite valeur. Si, en ce point, les deux courbes sont continûment différentiables, alors elles sont tangentes. Puisque la normale, $\mathbf{n}$, à toutes courbes de la forme $f(x_1, x_2) = cste$ est porportionnelle au son gradient, $\mathbf{n} \propto \nabla f$, les gradients $\nabla \mathcal{J}$ et $\nabla \varphi$ sont proportionnels et reliés par

$$\mathcal{J}' + \lambda \varphi' = 0$$

ce qui constitue la condition nécessaire pour que le problème ait une solution. La constante λ est appelée *multiplicateur de Lagrange*.

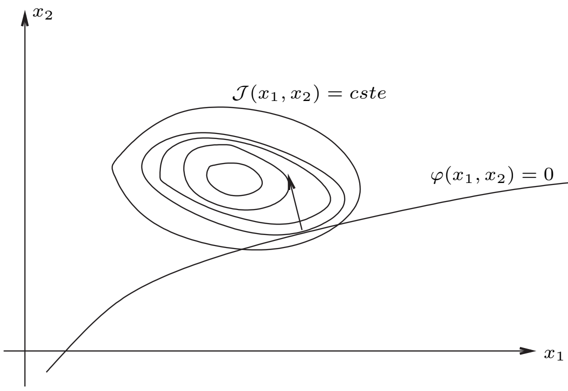


FIG. A.5. **Extremum pour un problème à deux dimensions**

Présentation mathématique Considérons un problème de minimisation d'une fonctionnelle $\mathcal{J}$: $\Omega \subset \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$ définie sur un ouvert convexe Ω avec *"contraintes égalités"* de la forme : trouver $\mathbf{u}$ tel que

$$\mathbf{u} \in \mathcal{U}, \text{ et } \quad \mathcal{J}(\mathbf{u}) = \inf_{\mathbf{v} \in \mathcal{U}} \mathcal{J}(\mathbf{v}), \tag{A.21}$$

où $\mathcal{U}$ est une partie donnée d'un espace vectoriel $\mathcal{E}$ de la forme

$$\mathcal{U} = \{\mathbf{v} \in \mathcal{E}; \varphi_i(\mathbf{v}) = 0, \quad 1 \leq i \leq m\}$$

Puisqu'il existe m "contraintes" φ_i, l'espace vectoriel $\mathcal{E}$ est partitionné sous la forme $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2$ avec

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1 &= \{\sum_{i=1}^{m} v_i e_i \in \mathbb{R}^m\} \\ \mathcal{E}_2 &= \{\sum_{i=m+1}^{n} v_i e_i \in \mathbb{R}^{n-m}\} \end{aligned}$$

e_i désignant la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Si $\mathbf{u}$ est un extremum relatif de la fonctionnelle $\mathcal{J}$ sur l'ensemble $\mathcal{U}$, il existe au voisinage de $\mathbf{u}$ un ouvert $O_1 \subset \mathcal{E}_1$, un ouvert $O_2 \subset \mathcal{E}_2$ et une application $f : O_1 \rightarrow O_2$, tels que $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \in O_1 \times O_2 \subset \Omega$, et

$$(O_1 \times O_2) \cap \mathcal{U} = \{(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \in O_1 \times O_2; \quad \mathbf{v}_1 = f(\mathbf{v}_2)\}$$

qui "exprime" la contrainte $\varphi(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = 0$. La fonction f, appelée fonction implicite est dérivable en $\mathbf{u}_2 \in O_2$ et sa dérivée est obtenue en construisant la fonction $h(\mathbf{v}_2) = \varphi(f(\mathbf{v}_2), \mathbf{v}_2)$ qui est nulle. La dérivée h' de h s'exprime par dérivation de fonctions de fonctions sous la forme

$$0 = h'(\mathbf{v}_2) = \partial_1\varphi(\mathbf{v}) f'(\mathbf{v}_2) + \partial_2\varphi(\mathbf{v})$$

Ce qui permet d'écrire

$$f'(\mathbf{v}_2) = -\frac{\partial_2\varphi(\mathbf{v})}{\partial_1\varphi(\mathbf{v})}$$

Alors la restriction G de la fonctionnelle $\mathcal{J}$ à l'ensemble $(O_1 \times O_2) \cap \mathcal{U}$ devient une fonctionelle "d'une seule variable" $\mathbf{v}_2$ qui s'écrit

$$G(\mathbf{v}_2) = \mathcal{J}(f(\mathbf{v}_2), \mathbf{v}_2)$$

et le problème de minimisation (A.21) se résout par l'équation d'Euler (A.9) appliquée à G :

$$G'(\mathbf{u}_2) = 0$$

Cette dérivée peut s'exprimer sous la forme

$$G'(\mathbf{u}_2) = \partial_1 \mathcal{J}(\mathbf{u}) f'(\mathbf{u}_2) + \partial_2 \mathcal{J}(\mathbf{u}) = -\partial_1 \mathcal{J}(\mathbf{u}) \frac{\partial_2 \varphi(\mathbf{u})}{\partial_1 \varphi(\mathbf{u})} + \partial_2 \mathcal{J}(\mathbf{u})$$

On a donc, d'une part

$$\partial_2 \mathcal{J}(\mathbf{u}) - \frac{\partial_1 \mathcal{J}(\mathbf{u})}{\partial_1 \varphi(\mathbf{u})} \partial_2 \varphi(\mathbf{u}) = 0$$

et puisque

$$\partial_1 \mathcal{J}(\mathbf{u}) = \partial_1 \mathcal{J}(\mathbf{u}) \frac{\partial_1 \mathcal{J}(\mathbf{u})}{\partial_1 \varphi(\mathbf{u})}$$

d'autre part, on obtient la relation

$$\mathcal{J}'(\mathbf{u}) + \Lambda(\mathbf{u}) \varphi'(\mathbf{u}) = 0$$

en posant $\Lambda(\mathbf{u}) = -\frac{\partial_1 \mathcal{J}(\mathbf{u})}{\partial_1 \varphi(\mathbf{u})}$ ou encore

$$\lambda_i(\mathbf{u}) = -\frac{\partial_i \mathcal{J}(\mathbf{u})}{\partial_i \varphi(\mathbf{u})}, \quad 1 \leq i \leq m$$

Les λ_i sont appelés multiplicateurs de Lagrange. Ils expriment l'influence d'une variation de la “contrainte” sur la valeur que prend la fonctionnelle en son extremum $\mathbf{u}$.

Théorème

Si $\mathbf{u}$ est la solution du problème de minimisation (A.21) sur l'ensemble

$$\mathcal{U} = \{\mathbf{v} \in \mathcal{E}; \varphi_i(\mathbf{v}) = 0, \quad 1 \leq i \leq m\}$$

en lequel les dérivées φ_i' sont linéairement indépendantes, alors existe m multiplcateurs de Lagrange tels que

$$\mathcal{J}'(\mathbf{u}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(\mathbf{u}) \varphi_i'(\mathbf{u}) = 0. \tag{A.22}$$

L'unicité des nombres λ_i est assuré par l'indépendance linéaire des dérivées φ_i'.

Lagrangien

L'application du précédent théorème pour résoudre le problème de minimisation (A.21) revient donc à chercher le couple $(\mathbf{u}, \lambda)$ qui minimise le Lagrangien

$$L : (\mathbf{v}, \mu) \in \mathcal{E} \times \mathbb{R}^m \to L(\mathbf{v}, \mu) = \mathcal{J}(\mathbf{v}) + \sum_{i=1}^{m} \mu_i \varphi_i(\mathbf{v}) \tag{A.23}$$

dans l'ensemble $\mathcal{E} \times \mathbb{R}^m$. Ce faisant on est ramené à un problème de minimisation sans contrainte décrit en section 2.

Fonctionnelle quadratique

Supposons que l'on recherche les extremums relatifs d'une fonctionnelle quadratique

$$\mathcal{J} : \mathbb{R}^n \to \mathcal{J}(\mathbf{v}) = \frac{1}{2}(\mathbb{A}\mathbf{v}, \mathbf{v}) - (\mathbf{f}, \mathbf{v})$$

où $\mathbb{A} \in \mathcal{A}_n$ est une matrice symétrique et $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^n$ un vecteur donné, par rapport à un ensemble de la forme

$$\mathcal{U} = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n; \quad \mathbb{C}\mathbf{v} = \mathbf{d}\}$$

où $\mathbb{C}$ est une matrice $m \times n$ donnée et $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^m$ un vecteur donné : on suppose $m < n$. Alors une condition nécessaire pour que la fonctionnelle $\mathcal{J}$ admette en $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ un extremum relatif est l'existence d'une solution $(\mathbf{u}, \lambda) \in \mathbb{R}^{n+m}$ du système linéaire

$$\begin{cases} \mathbb{A}\mathbf{u} + \mathbb{C}^t\lambda & = \mathbf{f} \\ \mathbb{C}\mathbf{u} & = \mathbf{d} \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} \mathbb{A} & \mathbb{C}^t \\ \mathbb{C} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{d} \end{pmatrix}$$

3.3 Minimisation avec *"contraintes inégalités"*

Relations de Kuhn et Tucker

Considérons un problème de minimisation d'une fonctionnelle convexe $\mathcal{J} : \Omega \subset \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ définie sur un ouvert convexe Ω avec *"contraintes inégalités"* de la forme : trouver $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ (où $\mathcal{U}$ est une partie non vide donnée de l'espace vectoriel $\mathcal{E}$) tel que

$$\begin{cases} \mathbf{u} \in \mathcal{U}, \text{ et } \quad \mathcal{J}(\mathbf{u}) = \inf_{\mathbf{v} \in \mathcal{U}} \mathcal{J}(\mathbf{v}), \\ \mathcal{U} = \{\mathbf{v} \in \mathcal{E}; \quad \varphi_i(\mathbf{v}) \leq 0, \quad 1 \leq i \leq m\}. \end{cases} \tag{A.24}$$

où les contraintes φ_i sont supposées convexes.

Nous admettrons les relations de Kuhn et Tucker qui stipulent que si la fonctionnelle $\mathcal{J}$ admet en $\mathbf{u}$ un minimum relatif par rapport à l'ensemble $\mathcal{U}$, alors il existe des nombres λ_i, $1 \leq i \leq m$, tels que

$$\begin{cases} \mathcal{J}'(\mathbf{u}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i(\mathbf{u})\varphi_i'(\mathbf{u}) = 0, \\ \lambda_i(\mathbf{u}) \geq 0, \quad 1 \leq i \leq m, \quad \sum_{i=1}^m \lambda_i(\mathbf{u})\varphi_i(\mathbf{u}) = 0. \end{cases} \tag{A.25}$$

Et, réciproquement, si il existe des nombres λ_i, $1 \leq i \leq m$ tels que les relations de Kuhn et Tucker soient vérifiées, alors la fonctionnelle $\mathcal{J}$ admet en $\mathbf{u}$ un minimum relatif par rapport à l'ensemble $\mathcal{U}$. On peut dire que les relations de Kuhn et Tucker sont aux "contraintes inégalités" ce que les multiplicateurs de Lagrange sont aux "contraintes égalités". On introduit alors le lagrangien associé au problème (A.24) sous la forme

$$L : (\mathbf{v}, \mu) \in \mathcal{E} \times \mathbb{R}_+^m \to L(\mathbf{v}, \mu) = \mathcal{J}(\mathbf{v}) + \sum_{i=1}^m \mu_i \varphi_i(\mathbf{v}) \tag{A.26}$$

Point selle du Lagrangien

Maximun de $G(\mu)$ Si les relations de Kuhn et Tucker sont vérifiées pour le couple $(\mathbf{u}, \lambda)$, alors pour tout $\mu \geq 0$ la fonction définie par

$$G : \mu \in \mathbb{R}_+^m \to G(\mu) = \mathcal{J}(\mathbf{u}) + \sum_{i=1}^m \mu_i \varphi_i(\mathbf{u}) = L(\mathbf{u}, \mu) = \inf_{\mathbf{v} \in \mathcal{E}} L(\mathbf{v}, \mu) \tag{A.27}$$

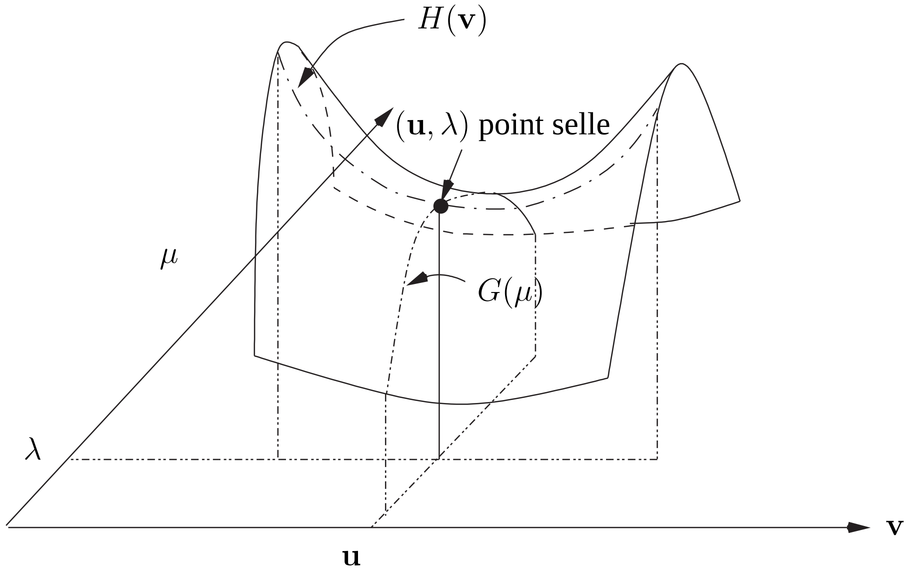


FIG. A.6. **Point selle** Interprétation géométrique du point selle du Lagrangien L.

est inférieur ou égale à $\mathcal{J}(\mathbf{u})$ puisque $\varphi_i(\mathbf{u}) \leq 0$.

Or $G(\lambda) = L(\mathbf{u}, \lambda) = \mathcal{J}(\mathbf{u}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_i(\mathbf{u}) = \mathcal{J}(\mathbf{u})$ d'après (A.25b). On en déduit donc que

$$G(\lambda) = \sup_{\mu \in \mathbb{R}_+^m} G(\mu) \quad \Rightarrow \quad L(\mathbf{u}, \lambda) = \sup_{\mu \in \mathbb{R}_+^m} L(\mathbf{u}, \mu)$$

Autrement dit, λ est le maximum relatif (cf. figure A.6), sur $\mathbb{R}_+^m$, de la fonction $G(\mu)$.

Minimum de $H(\mathbf{v})$ Supposons toujours que le couple $(\mathbf{u}, \lambda)$ vérifie les relations de Kuhn et Tucker, la fonction $H(\mathbf{v})$ définie par

$$H : \mathbf{v} \in \mathcal{E} \to H(\mathbf{v}) = \mathcal{J}(\mathbf{v}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_i(\mathbf{v}) = L(\mathbf{v}, \lambda) = \sup_{\mu \in \mathbb{R}_+^m} L(\mathbf{v}, \mu)$$

étant une somme de fonctions convexes est convexe. Cette fonction $H(\mathbf{v})$ (cf. figure A.6) présente donc un minimum en $\mathbf{u}$ tel que

$$H(\mathbf{u}) = \inf_{\mathbf{v} \in \mathcal{E}} H(\mathbf{v}) \quad \Rightarrow \quad L(\mathbf{u}, \lambda) = \inf_{\mathbf{v} \in \mathcal{E}} L(\mathbf{v}, \lambda)$$

Point selle du Lagrangien On a donc démontré que le couple $(\mathbf{u}, \lambda)$, vérifiant les relations de Kuhn et Tucker, donc solution du problème (A.24), vérifie la relation

$$\sup_{\mu \in \mathbb{R}_+^m} L(\mathbf{u}, \mu) = L(\mathbf{u}, \lambda) = \inf_{\mathbf{v} \in \mathcal{E}} L(\mathbf{v}, \lambda), \tag{A.28}$$

ce qui constitue précisément la définition du point selle du Langrangien (A.26) $L(\mathbf{v}, \mu)$.

Réciproquement, on montre (REF) que le point selle du Langrangien $L(\mathbf{v}, \mu)$ est la solution du problème (A.24).

3.4 Méthode de résolution

Problème primal et dual

Finalement, nous avons établi que la solution $\mathbf{u}$ du problème (A.24) coïncide avec le premier argument du point selle du Lagrangien (A.26). Si, le second argument, λ, de ce point selle était connu, c'est à dire si λ était solution du problème : trouver λ tel que

$$\lambda \in \mathbb{R}_+^m, \quad G(\lambda) = \sup_{\mu \in \mathbb{R}_+^m} G(\mu) \tag{A.29}$$

alors, le problème (A.24) avec *contraintes* serait remplacé par le problème sans *contrainte* : trouver $\mathbf{u}_\lambda$ tel que

$$\mathbf{u}_\lambda \in \mathcal{E}, \quad H(\mathbf{u}_\lambda) = \inf_{\mathbf{v} \in \mathcal{E}} H(\mathbf{v}) \tag{A.30}$$

On appelle (A.29) le problème dual du problème primal (A.24). De même $\mu \in \mathbb{R}_+^m$ est la variable duale de la variable $\mathbf{v} \in \mathcal{U} \subset \mathcal{E}$.

Pour résoudre le problème dual (A.29) on calcule, selon (A.4), la dérivée de la fonction G :

$$G'(\mu)\zeta = \sum_{i=1}^{m} \zeta_i \varphi_i(\mathbf{u}_\mu)$$

Puisque la fonction G admet un maximum en λ sur l'ensemble convexe $\mathbb{R}_+^m$, l'inéquation d'Euler (A.11) montre que[2]

$$\langle G'(\lambda) \,|\, \mu - \lambda \rangle_m \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \langle \varphi(\mathbf{u}_\lambda) \,|\, \mu - \lambda \rangle_m \leq 0, \quad \forall \mu \in \mathbb{R}_+^m \tag{A.31}$$

où $\langle . \,|\, . \rangle_m$ est le produit scalaire dans $\mathbb{R}^m$. Dès lors les relations de Kuhn et Tucker peuvent prendre la forme

$$\begin{cases} \mathcal{J}'(\mathbf{u}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i(\mathbf{u}) \varphi_i'(\mathbf{u}) = 0, & \\ \langle \varphi(\mathbf{u}_\lambda) \,|\, \mu - \lambda \rangle_m \leq 0 & \text{pour tout } \mu \in \mathbb{R}_+^m \end{cases} \tag{A.32}$$

La première de ces équations, qui correspond à l'annulation de la dérivée de $H(\mathbf{v})$ en $\mathbf{u}_\lambda$, et qui permettrait de résoudre le problème (A.30) est délicate à résoudre puisque λ dépend naturellement de $\mathbf{u}_\lambda$. Dans la pratique, on préfère introduire la fonction

$$H_\mu : \mathbf{v} \in \mathcal{E} \to H_\mu(\mathbf{v}) = \mathcal{J}(\mathbf{v}) + \sum_{i=1}^{m} \mu_i \varphi_i(\mathbf{v}) = L(\mathbf{v}, \mu)$$

et résoudre le problème P_μ suivant : trouver $\mathbf{u}_\mu$ tel que

$$\mathbf{u}_\mu \in \mathcal{E}, \quad H_\mu(\mathbf{u}_\mu) = \inf_{\mathbf{v} \in \mathcal{E}} H_\mu(\mathbf{v}) \quad \Leftrightarrow \quad L(\mathbf{u}_\mu, \mu) = \inf_{\mathbf{v} \in \mathcal{E}} L(\mathbf{v}, \mu) \tag{A.33}$$

dont la solution unique $\mathbf{u}_\mu$ dépend continûment du paramètre $\mu \in \mathbb{R}_+^m$.

Si λ est une solution du problème dual (A.29), alors la solution $\mathbf{u}_\lambda$ du problème P_λ correspondant est une solution du problème (A.24). En effet, puisque λ est une solution du problème dual une partie de la relation (A.28) est établie :

$$G(\lambda) = L(\mathbf{u}_\lambda, \lambda) = \inf_{\mathbf{v} \in \mathcal{E}} L(\mathbf{v}, \lambda).$$

[2] Le sens de l'inégalite est inversé puisqu'il s'agit d'un maximum et non d'un minimum

Il reste donc à démontrer la relation

$$\sup_{\mu \in \mathbb{R}_+^m} L(\mathbf{u}_\lambda, \mu) = L(\mathbf{u}_\lambda, \lambda)$$

pour établir que le couple $(\mathbf{u}_\lambda, \lambda)$ est le point selle du Lagrangien L et donc que $\mathbf{u}_\lambda$ est solution du problème (A.24). Pour cela, on écrit la relation (A.31) sous la forme

$$\sum_{i=1}^{m} \mu_i \varphi_i(\mathbf{u}_\lambda) \leq \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_i(\mathbf{u}_\lambda), \quad \forall \mu \in \mathbb{R}_+^m.$$

Par suite

$$\begin{aligned} L(\mathbf{u}_\mu, \mu) &= \mathcal{J}(\mathbf{u}_\lambda) + \sum_{i=1}^{m} \mu_i \varphi_i(\mathbf{u}_\lambda) \\ &\leq \mathcal{J}(\mathbf{u}_\lambda) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_i(\mathbf{u}_\lambda) = L(\mathbf{u}_\lambda, \lambda) \end{aligned}$$

pour tout $\mu \in \mathbb{R}_+^m$, ce qui est précisément la deuxième inégalité qu'il fallait démontrer.

Exemple Appliquons le résultat qui précède dans le cas où $\mathcal{E} = \mathbb{R}^n$ et lorsque $\mathcal{U}$ est de la forme

$$\mathcal{U} = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n; \quad \mathbb{C}\mathbf{v} - \mathbf{d} \leq 0\}$$

où $\mathbb{C}$ est une matrice $m \times n$ donnée et $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^m$ un vecteur donné : on suppose $m < n$. Dans ce cas H_μ s'écrit

$$H_\mu(\mathbf{v}) = \mathcal{J}(\mathbf{v}) + \langle \mu \,|\, \mathbb{C}\mathbf{v} - \mathbf{d} \rangle_m$$

La dérivée de la fonction $H_\mu(\mathbf{v})$ en $\mathbf{u}_\mu$ est calculée en utilisant (A.4), soit en calculant

$$\begin{aligned} H_\mu(\mathbf{u}_\mu + \theta\mathbf{v}) &= \mathcal{J}(\mathbf{u}_\mu + \theta\mathbf{v}) + \langle \mu \,|\, \mathbb{C}(\mathbf{u}_\mu + \theta\mathbf{v}) \rangle_m - \langle \mu \,|\, \mathbf{d} \rangle_m \\ &= \mathcal{J}(\mathbf{u}_\mu + \theta\mathbf{v}) + \langle \mu \,|\, \mathbb{C}\mathbf{u}_\mu \rangle_m + \theta \langle \mu \,|\, \mathbb{C}\mathbf{v} \rangle_m - \langle \mu \,|\, \mathbf{d} \rangle_m \end{aligned}$$

soit

$$\frac{H_\mu(\mathbf{u}_\mu + \theta\mathbf{v}) - H_\mu(\mathbf{u}_\mu)}{\theta} = \frac{\mathcal{J}(\mathbf{u}_\mu + \theta\mathbf{v}) - \mathcal{J}(\mathbf{u}_\mu}{\theta} + \langle \mu \,|\, \mathbb{C}\mathbf{v} \rangle_m .$$

Ce qui permet d'écrire toujours selon (A.4)

$$H'_\mu(\mathbf{u}_\mu)\mathbf{v} = \mathcal{J}'(\mathbf{u}_\mu)\mathbf{v} + \langle \mu \,|\, \mathbb{C}\mathbf{v} \rangle_m , \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$$

Si $\mathbf{u}_\mu$ est la solution du problème P_μ définie en (A.33), alors

$$H'_\mu(\mathbf{u}_\mu)\mathbf{v} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{J}'(\mathbf{u}_\mu) + \mathbb{C}^t \mu = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$$

$\mu \in \mathbb{R}_+^m$. Si, maintenant, λ est la solution du problème dual (A.29) alors l'expression précédente est évaluée pour $\mu = \lambda$, soit :

$$\mathcal{J}'(\mathbf{u}_\lambda)\mathbf{v} + \langle \lambda \,|\, \mathbb{C}\mathbf{v} \rangle_m = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \tag{A.34}$$

Fonctionnelle quadratique

Supposons que l'on recherche les extremums relatifs d'une fonctionnelle quadratique définie sur $\mathcal{E} = \mathbb{R}^n$

$$\mathcal{J} : \mathbb{R}^n \to \mathcal{J}(\mathbf{v}) = \frac{1}{2}(\mathbb{A}\mathbf{v}, \mathbf{v}) - (\mathbf{f}, \mathbf{v})$$

où $\mathbb{A} \in \mathcal{A}_n$ est une matrice symétrique et $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^n$ un vecteur donné, par rapport à un ensemble de la forme

$$\mathcal{U} = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n; \quad \mathbb{C}\mathbf{v} - \mathbf{d} \le 0\}$$

où $\mathbb{C}$ est une matrice $m \times n$ donnée et $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^m$ un vecteur donné : on suppose $m < n$.

Le Lagrangien associé à ce problème

$$L(\mathbf{v}, \mu) = \frac{1}{2}(\mathbb{A}\mathbf{v}, \mathbf{v}) - (\mathbf{f}, \mathbf{v}) + \langle \mu \,|\, \mathbb{C}\mathbf{v} - \mathbf{d} \rangle_m$$

admet un point selle $(\mathbf{u}, \lambda)$ vérifiant les relations de Kuhn et Tucker (A.32) qui s'écrivent, compte tenu de (A.10)

$$\begin{cases} (\mathbb{A}\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \langle \lambda \,|\, \mathbb{C}\mathbf{v} \rangle_m = (\mathbf{f}, \mathbf{v}), & \text{pour tout } \mathbf{v} \in \mathcal{E} = \mathbb{R}^n \\ \langle \mathbb{C}\mathbf{u} - \mathbf{d} \,|\, \mu - \lambda \rangle_m \le 0 & \text{pour tout } \mu \in \mathbb{R}^m_+ \end{cases} \tag{A.35}$$

Méthode de substitution Cette méthode propose de substituer la solution de la première équation (A.35 a)

$$\mathbf{u} = \mathbb{A}^{-1}(\mathbf{f} - \mathbb{C}^t \lambda)$$

dans la seconde équation (A.35 b) pour donner le problème suivant : trouver λ tel que

$$\lambda \in \mathbb{R}^m_+, \text{ et } \quad \langle \mathbb{B}\lambda - \mathbf{F} \,|\, \mu - \lambda \rangle_m \le 0 \quad \forall \mu \in \mathbb{R}^m_+$$

avec

$$\mathbb{B} = -\mathbb{C}\mathbb{A}^{-1}\mathbb{C}^t, \text{ et } \quad \mathbf{F} = \mathbf{d} - \mathbb{C}\mathbb{A}^{-1}\mathbf{f}$$

La dernière inéquation a la forme d'une inéquation d'Euler relative à la maximisation de la fonctionnelle quadratique

$$J : \mathbb{R}^m \to J(\mu) = \frac{1}{2}(\mathbb{B}\mu, \mu) - (\mathbf{F}, \mu) \in \mathbb{R}$$

sur l'ensemble convexe $\mathcal{U} = \mathbb{R}^m_+$, dont la solution λ peut être obtenue numériquement par une méthode de gradient avec projection décrite en section 3.1. Les relations (A.17) donnent dans ce cas[3]

$$\lambda_i^{k+1} = \max\{\lambda_i^k + \rho(\mathbb{B}\lambda^k - \mathbf{F})_i, 0\}, \quad 1 \le i \le m, \quad \rho > 0.$$

[3] Remarquons le changement de signe $\lambda_i^k + \rho(\ldots)$ dû à la résolution d'un problème non plus de minimisation mais de maximisation.

B

Matrice de raideur géométrique

La discrétisation de la formulation variationnelle (V.25) par la méthode des éléments finis mène à une nouvelle matrice, appelée matrice de raideur géométrique. Cette matrice est issue de la forme bilinéaire

$$k_{\sigma^o}(\mathbf{u},\hat{\mathbf{v}}) = \int_{\Omega} \sigma^o_{km} u_{l,m} \hat{v}_{l,k} dv \tag{B.1}$$

Dans la plupart des codes d'élément finis il existe une routine de calcul d'une matrice de raideur géométrique utilisée pour traiter les problèmes de flambage. Cependant, ces routines sont des boîtes noires qui n'ont pas donné les résultats escomptés. Nous avons donc préféré calculer nous mêmes cette matrice pour un élément fini particulier : l'élément isoparamétrique CU8, à 8 sommets et à interpolation linéaire. La matrice de raideur géométrique est d'abord calculée pour un élément. Cette matrice est issue de la forme bilinéaire

$$k^e_{\sigma^o}(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \int_{\text{élément}} \sigma^o_{km} u_{l,m} v_{l,k} dv \tag{B.2}$$

où l'intégrale porte sur le volume de l'élément. La matrice globale est ensuite assemblée à partir des matrices élémentaires. Deux types d'interpolation interviennent dans la construction d'un élément fini : l'interpolation géométrique et l'interpolation des déplacements. Un élément fini est dit isoparamétrique quand il est fondé sur des interpolations identiques pour sa géométrie et son champ de déplacement. Connaissant les positions (x_i, y_i, z_i) et les déplacements (u_i, v_i, w_i) pour chaque

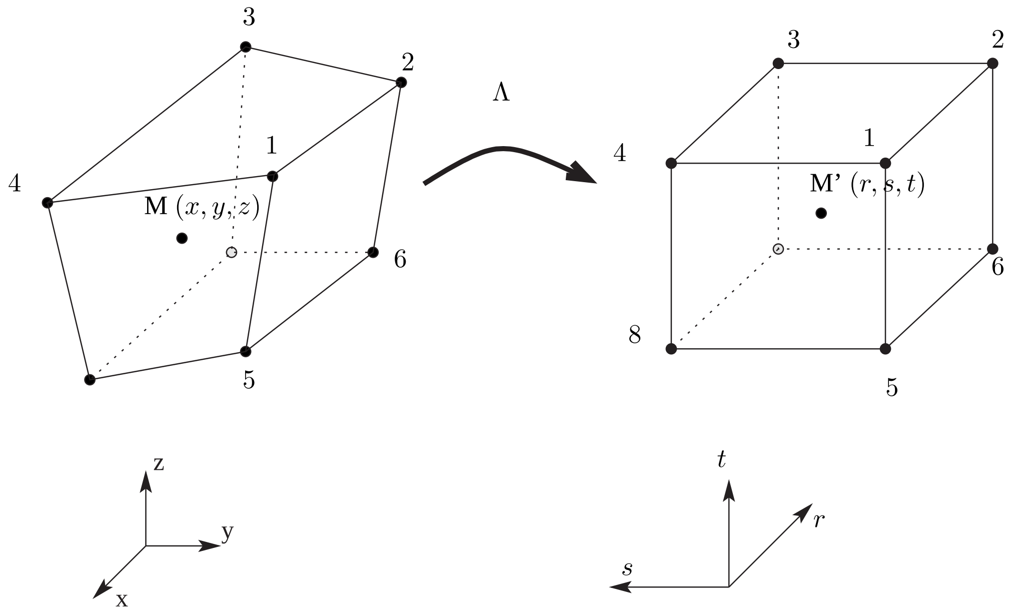


FIG. B.1. **Elément isoparamétrique CU8** Coordonnées physiques et intrinsèques. Le point M de coordonnées physiques (x,y,z) est reresénté par un point M' dans le repère intrinsèque de l'élément par ses coordonnées (r, s, t).

noeud i de l'élément CU8, les 8 fonctions d'interpolation Λ_i permettent d'interpoler la position (x, y, z) et le déplacement (u, v, w) d'un point M quelconque de l'élément par les formules

$$\text{interpolation géométrique} \begin{cases} x = \sum_{i=1}^{8} \Lambda_i(r,s,t)x_i \\ y = \sum_{i=1}^{8} \Lambda_i(r,s,t)y_i \\ z = \sum_{i=1}^{8} \Lambda_i(r,s,t)z_i \end{cases}$$

$$\text{interpolation des déplacements} \begin{cases} u = \sum_{i=1}^{8} \Lambda_i(r,s,t)u_i \\ v = \sum_{i=1}^{8} \Lambda_i(r,s,t)v_i \\ w = \sum_{i=1}^{8} \Lambda_i(r,s,t)w_i \end{cases}$$

avec la fonction d'interpolation correspondant au noeud i

$$\Lambda_i(r,s,t) = \frac{1}{8}(1 + rr_i)(1 + ss_i)(1 + tt_i)$$

(r_i, s_i, t_i prenant la valeur ± 1 selon le noeud considéré[1]). Ces formules peuvent être écrites sous la forme matricielle

$$\begin{cases} x = [\Lambda]^t \mathbf{X} \\ y = [\Lambda]^t \mathbf{Y} \\ z = [\Lambda]^t \mathbf{Z} \end{cases} , \quad \begin{cases} u = [\Lambda]^t \mathbf{U} \\ v = [\Lambda]^t \mathbf{V} \\ w = [\Lambda]^t \mathbf{W} \end{cases}$$

[1]Par exemple pour le noeud 6, on a $r = 1$, $s = -1$ et $t = -1$ d'où

$$\lambda_6 = \frac{1}{8}(1 + r)(1 - s)(1 - t)$$

avec

$$[\Lambda]^t = [\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_8]\,, \quad \text{et} \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_8 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_8 \end{pmatrix} \ldots \tag{B.3}$$

Le changement de coordonnées de l'espace physique vers l'espace intrinsèque de l'élément permet d'exprimer plus simplement les calculs d'intégrales intervenant dans la forme linéaire (B.2). En effet, dans cette forme bilinéaire interviennent des dérivées spatiales des champs de déplacement. L'utilisation de la matrice jacobienne $\mathbb{J}$ permet de relier les dérivées dans les deux systèmes de coordonnées

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial s} \\ \frac{\partial}{\partial t} \end{pmatrix} = \mathbb{J} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Soit encore si le jacobien n'est pas singulier

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} \end{pmatrix} = \mathbb{J}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{\partial u}{\partial s} \\ \frac{\partial u}{\partial t} \end{pmatrix} = \mathbb{J}^{-1} \begin{pmatrix} [\Lambda]^t_{,s} \\ [\Lambda]^t_{,s} \\ [\Lambda]^t_{,t} \end{pmatrix} \mathbf{U}$$

Finalement, on obtient

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbb{J}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{J}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{J}^{-1} \end{bmatrix}}_{\mathcal{J}^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} \begin{matrix} [\Lambda]^t_{,s} \\ [\Lambda]^t_{,s} \\ [\Lambda]^t_{,t} \end{matrix} & 0 & 0 \\ 0 & \begin{matrix} [\Lambda]^t_{,s} \\ [\Lambda]^t_{,s} \\ [\Lambda]^t_{,t} \end{matrix} & 0 \\ 0 & 0 & \begin{matrix} [\Lambda]^t_{,s} \\ [\Lambda]^t_{,s} \\ [\Lambda]^t_{,t} \end{matrix} \end{bmatrix}}_{\mathbb{L}} \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{V} \\ \mathbf{W} \end{pmatrix}}_{\mathbf{Q}}$$

Après quelques manipulations matricielles, il est possible de mettre la forme bilinéaire (B.2) sous la forme

$$k^e_{\sigma^o}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\text{élément}} \mathbf{Q}^t \mathbb{L}^t (\mathcal{J}^{-1})^t \Sigma_0 \mathcal{J}^{-1} \mathbb{L} \mathbf{Q}\, dv$$

où la matrice (9×9) Σ_0 est fonction du tenseur[2] de précontrainte σ_0

$$\Sigma_0 = \begin{bmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 \end{bmatrix}$$

Ce qui permet d'écrire la matrice de raideur géométrique élémentaire pour l'élément isoparamétrique CU8

$$\mathbb{K}^e_{\sigma^o} = \int_{\text{élément}} \mathbb{L}^t (\mathcal{J}^{-1})^t \Sigma_0 \mathcal{J}^{-1} \mathbb{L}\, dv \tag{B.4}$$

[2]Le tenseur σ_0 est écrit sous la forme d'une matrice (3×3).

Cette intégration est réalisée par la méthode des points de Gauss sur l'élément cubique en coordonnées intrinsèques

$$\mathbb{K}^e_{\sigma^o} = \int_{\text{hexaèdre}} \mathbb{L}^t (\mathcal{J}^{-1})^t \Sigma_0 \mathcal{J}^{-1} \mathbb{L} \det \mathcal{J} drdsdt \tag{B.5}$$

C

Noyau de Poisson unidimensionnel

1 BARRE SEMI-INFINIE

Considérons une barre semi-infinie occupant l'espace $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty[$ initialement au repos et soumise à une force impulsive $\delta(t)$ en son extrémité $x = 0$ au temps $t = 0$. Le problème est le suivant

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \Box_1 P = 0, \quad \frac{EA}{\rho} = c^2 \tag{C.1}$$

Avec les conditions initiales suivantes

$$P_0(x) = P(x,0) = 0, \quad \dot{P}_0(x) = \frac{\partial P}{\partial t}(x,0) = 0 \tag{C.2}$$

Et les conditions aux limites spatiales

$$EA\frac{\partial P}{\partial x} = -\delta(t) \qquad \text{en } x = 0 \tag{C.3a}$$

$$\text{Condition de Sommerfeld pour } x \to +\infty \tag{C.3b}$$

Le moins dans la condition (C.3b) vient de la projection sur la normale sortante à la barre $\mathbf{n} = -\mathbf{e}_x$ de la force $\delta(t)\mathbf{e}_x$. Une transformée de Laplace est appliquée à ces équations. La transformée de

$P(x,t)$ est

$$\bar{P}(x,s) = L(P) = \int_0^{+\infty} P(x,t)e^{-st}dt$$

On note les propriétés suivantes

$$\begin{aligned} L(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}) &= \frac{\partial^2 \bar{P}}{\partial x^2} \\ L(\frac{\partial^2 P}{\partial t^2}) &= s^2\bar{P} - sP_0(x) - \dot{P}_0(x) \end{aligned}$$

Compte tenu de la nullité des conditions initiales, le système d'équations devient

$$\frac{\partial^2 \bar{P}}{\partial x^2} - \frac{s^2}{c^2}\bar{P} = 0 \qquad \text{dans } \mathbb{R}^+ \tag{C.4a}$$

$$EA\frac{\partial \bar{P}}{\partial x} = -1 \qquad \text{en } x = 0 \tag{C.4b}$$

$$\text{Condition de Sommerfeld pour } x \to +\infty \tag{C.4c}$$

La solution générale de (C.4a) est

$$\bar{P}(x,s) = ae^{+\frac{s}{c}x} + be^{-\frac{s}{c}x}$$

La condition de Sommerfeld impose $a = 0$ et la condition à la limite (C.4b) permet de calculer b pour donner

$$\bar{P}(x,s) = \frac{1}{\rho c}\frac{e^{-\frac{s}{c}x}}{s} \tag{C.5}$$

Par transformée inverse il vient

$$P(x,t) = \frac{1}{\rho c}Y(t - \frac{x}{c}) \tag{C.6}$$

Ce noyau de Poisson représente le déplacement dans la barre à la position x et au temps t par unité de

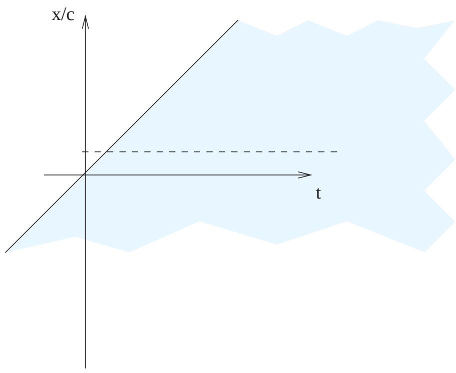


FIG. C.1. **Noyau de Poisson d'une barre semi-infinie** Noyau de Poisson du problème de Neumann pour une barre semi-infinie. La zone d'influence de l'onde est la zone hachurée de l'espace-temps (x,t).

force surfacique appliquée en $x = 0$ à $t = 0$. Pour les autres instants la condition à la limite spatiale en $x = 0$ est une condition de Neumann homogène. Cette fonction est donc le noyau de Poisson du problème de Neumann. Vérifions les propriétés de ce noyau de Poisson. La dérivée spatiale donne

$$EA\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{EA}{\rho c}\frac{-1}{c}\delta(t - \frac{x}{c}) = -\delta(t - \frac{x}{c})$$

et la condition (C.3a) est bien vérifiée. La dérivée temporelle est

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{1}{\rho c}\delta(t - \frac{x}{c}) \tag{C.7}$$

Le déplacement de la barre pour une force $F(t)$ appliquée en $x = 0$ à partir du temps $t = 0$ est alors donnée par la convolution

$$\begin{aligned} u(x,t) &= P(x,t) * F(t) \\ &= \frac{1}{\rho c}\int_0^{t-\frac{x}{c}} F(\tau)d\tau \end{aligned}$$

Pour la vitesse, cela donne

$$\begin{aligned} \dot{u}(x,t) &= \dot{P}(x,t) * F(t) \\ &= \frac{1}{\rho c}F(t - \frac{x}{c}) \end{aligned}$$

Finalement pour la force au point x à l'instant t

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= EA\frac{\partial}{\partial x}(P(x,t) * F(t)) \\ &= \frac{\partial P}{\partial x}(x,t) * F(t) \\ &= -\frac{1}{\rho c^2}\delta(t - \frac{x}{c}) * F(t) \\ &= -\frac{1}{\rho c^2}F(t - \frac{x}{c}) \end{aligned}$$

1.1 Conservation de l'energie

L'énergie cinétique et l'énergie de déformation par unité de surface s'écrivent

$$E_c(t) = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \rho\dot{u}^2 dx, \quad W(t) = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} EA(\frac{\partial u}{\partial x})^2 dx$$

Ce qui donne pour l'énergie cinétique

$$\begin{aligned} E_c(t) &= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{1}{\rho c^2}F^2(t - \frac{x}{c})dx \\ &= \frac{1}{2\rho c}\int_0^{t} F^2(\tau)d\tau \end{aligned}$$

et pour l'énergie de déformation

$$\begin{aligned} W(t) &= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} EA(\frac{\partial u}{\partial x})^2 dx \\ &= \frac{1}{2\rho c}\int_0^{t} F^2(\tau)d\tau \end{aligned}$$

Ce qui permet d'écrire

$$\frac{d}{dt}(E_c + W(t)) = \frac{1}{\rho c}F^2(t)$$

or on a, d'après le calcul de la vitesse ci-dessus, en $x = 0$

$$\dot{u}(0,t) = \frac{1}{\rho c} F(t)$$

d'où

$$\frac{d}{dt}(E_c + W) = \dot{u}(0,t)F(t) \tag{C.8}$$

Ce qui est l'équation de conservation de l'énergie appliquée à la barre semi-infinie. On a aussi

$$\frac{d}{dt}E_c = \frac{\dot{u}(0,t)}{2}F(t)$$

et

$$\frac{d}{dt}W(t) = \frac{\dot{u}(0,t)}{2}F(t)$$

2 BARRE LIBRE-LIBRE DE LONGUEUR FINIE

Considérons une barre de longueur L. Les équations vérifiées par le noyau de Poisson sont

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \Box_1 P = 0 \qquad \text{pour } x \in]0, L[\tag{C.9a}$$

$$EA\frac{\partial P}{\partial x} = -\delta(t) \qquad \text{en } x = 0 \tag{C.9b}$$

$$EA\frac{\partial P}{\partial x} = 0 \qquad \text{en } x = L \tag{C.9c}$$

$$P_0(x) = P(x,0) = 0, \quad \dot{P}_0(x) = \frac{\partial P}{\partial t}(x,0) = 0 \qquad \text{conditions initiales nulles} \tag{C.9d}$$

Vérifions que le noyau de Poisson s'écrit (Cf. figure C.2)

$$P(x,t) = \frac{1}{\rho c}\left[Y(t - \frac{x}{c}) + \sum_{k=1}^{+\infty} Y(t + \frac{x - 2kL}{c}) + Y(t - \frac{x + 2kL}{c})\right] \tag{C.10}$$

Ses dérivées spatiales et temporelles sont

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P}{\partial x} &= \frac{1}{\rho c^2}\left[-\delta(t - \frac{x}{c}) + \sum_{k=1}^{+\infty} \delta(t + \frac{x - 2kL}{c}) - \delta(t - \frac{x + 2kL}{c})\right] \\
\frac{\partial P}{\partial t} &= \frac{1}{\rho c}\left[\delta(t - \frac{x}{c}) + \sum_{k=1}^{+\infty} \delta(t + \frac{x - 2kL}{c}) + \delta(t - \frac{x + 2kL}{c})\right]
\end{aligned}$$

on a bien en $x = 0$

$$\begin{aligned}
EA\frac{\partial P}{\partial x} &= \frac{EA}{\rho c^2}\left[-\delta(t) + \sum_{k=1}^{+\infty} \delta(t - \frac{2kL}{c}) - \delta(t - \frac{2kL}{c})\right] \\
&= -\delta(t)
\end{aligned}$$

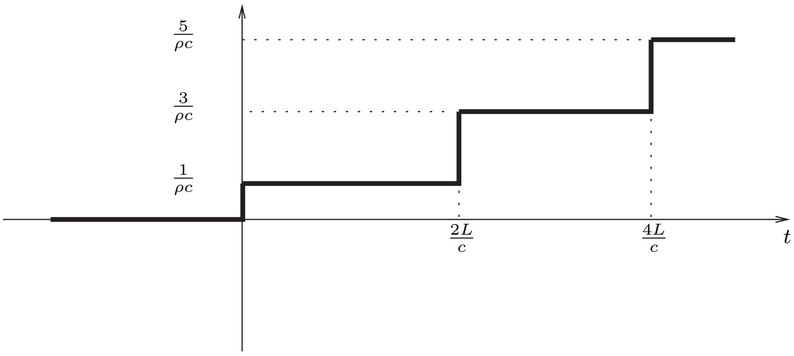


FIG. C.2. **Noyau de Poisson d'un barre de longueur** L Noyau de Poisson $P(0,t)$ d'une barre libre-libre de longueur L au point $x=0$

en $x = L$

$$
\begin{aligned}
EA\frac{\partial P}{\partial x} &= \frac{EA}{\rho c^2}\left[-\delta(t-\frac{L}{c}) + \sum_{k=1}^{+\infty}\delta(t-\frac{(2k-1)L}{c}) - \delta(t-\frac{(2k+1)L}{c})\right] \\
&= -\delta(t-\frac{L}{c}) + \delta(t-\frac{L}{c}) + \sum_{k=2}^{+\infty}\delta(t-\frac{(2k-1)L}{c}) - \sum_{k=1}^{+\infty}\delta(t-\frac{(2k+1)L}{c}) \\
&= -\delta(t-\frac{L}{c}) + \delta(t-\frac{L}{c}) + \sum_{k=1}^{+\infty}\delta(t-\frac{(2k+1)L}{c}) - \delta(t-\frac{(2k+1)L}{c}) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

D

Oscillations amorties des systèmes à n degrés de liberté

En présence d'amortissement, les valeurs propres ω_k et les vecteurs propres $\mathbf{\Phi}_k$ ne sont plus réels mais complexes (ω_k et $\mathbf{\Phi}_k$ prennent des valeurs dans $\mathcal{C}$). La partie imagimaire de la pulsation représente l'amortissement du mode correspondant. Dans la plupart des cas, les équations du mouvement sont projetées sur la base modale des modes propres non amortis. En toute rigueur même pour de petits amortissements, le système n'est pas diagonalisable sur cette base et une erreur est commise en adoptant cette méthode. Or, il est tout à fait possible de calculer les modes propres complexes et de projeter les équations sur cette base. C'est l'objet de cette annexe.

1 EQUATIONS D'UN SYSTÈME AMORTI

En supposant que les matrices de raideur et d'amortissement sont indépendantes de la fréquence (hypothèse des basses fréquences) et en posant $s = i\omega$, l'équation du mouvement d'un système amorti peut se mettre sous la forme

$$\left(\mathbb{K} + s\mathbb{D} + s^2\mathbb{M}\right)\mathbf{U} = \mathbf{F}(s) \tag{D.1}$$

Ce qui peut s'écrire à l'aide de la représentation par le vecteur d'état

$$\mathbf{X}(s) = \begin{pmatrix} \mathbf{U}(s) \\ s\mathbf{U}(s) \end{pmatrix} \tag{D.2}$$

sous la forme

$$\begin{bmatrix} \mathbb{K} & 0 \\ 0 & -\mathbb{M} \end{bmatrix} \mathbf{X}(s) + s \begin{bmatrix} \mathbb{D} & \mathbb{M} \\ \mathbb{M} & 0 \end{bmatrix} \mathbf{X}(s) = \begin{pmatrix} \mathbf{F}(s) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{D.3}$$

soit encore

$$\left[\ \mathbb{A} + s\mathbb{B} \ \right] \mathbf{X}(s) = \mathbf{Q}(s) \tag{D.4}$$

2 CAS HOMOGÈNE, SYSTÈME AUX VALEURS PROPRES

2.1 Définitions

Si $\mathbf{\Theta}_k$ est un vecteur propre du système (D.4), associé à la valeur propre s_k, alors il vérifie l'équation suivante

$$\left[\ \mathbb{A} + s_k\mathbb{B} \ \right] \mathbf{\Theta}_k = 0 \tag{D.5}$$

En adoptant la notation matricielle, les $2N$ vecteurs propres sont regroupés dans la matrice $\overline{\Theta}$ de dimension $2N \times 2N$

$$\overline{\Theta}^t = \begin{pmatrix} \mathbf{\Theta}_1 & \mathbf{\Theta}_2 & \dots & \mathbf{\Theta}_{2N} \end{pmatrix}$$

les valeurs propres associées sont regroupées dans la matrice diagonale $[\mathbf{s}]$ de dimension $2N \times 2N$. La matrice $\overline{\Phi}$ de dimension $N \times 2N$ est aussi introduite

$$\overline{\Phi} = \begin{pmatrix} \mathbf{\Phi}_1 & \mathbf{\Phi}_2 & \dots & \mathbf{\Phi}_{2N} \end{pmatrix}$$

où les $\mathbf{\Phi}_k$ sont les vecteurs propres associés au système (D.1) qu'il faut exprimer. Chaque $\mathbf{\Phi}_k$ vérifie

$$\left(\mathbb{K} + s_k\mathbb{D} + s_k^2\mathbb{M}\right)\mathbf{\Phi}_k = 0 \tag{D.6}$$

Il existe $2N$ vecteurs de ce type. Les valeurs propres s_k sont les mêmes que celles associées au système (D.5). La matrice $\overline{\Phi}$ est telle que

$$\overline{\Theta} = \begin{pmatrix} \overline{\Phi} \\ \overline{\Phi}[\mathbf{s}] \end{pmatrix} \tag{D.7}$$

2.2 Relations d'orthogonalité des modes

Représentation par vecteur d'état

Si $\mathbf{\Theta}_i$ et $\mathbf{\Theta}_j$ sont deux vecteurs propres de (D.5) associés respectivement aux valeurs propres s_i et s_j, on montre, les relations suivantes

$$\begin{aligned} \mathbf{\Theta}_j^t \mathbb{A} \mathbf{\Theta}_i &= \delta_{ij} a_i \\ \mathbf{\Theta}_j^t \mathbb{B} \mathbf{\Theta}_i &= \delta_{ij} b_i \\ s_i &= -\frac{a_i}{b_i} \end{aligned} \tag{D.8}$$

Sous forme matricielle, les relations d'orthogonalité (D.8) se mettent sous la forme

$$\overline{\Theta}^t \left[\ \mathbb{A} + s\mathbb{B} \ \right] \overline{\Theta} = \begin{bmatrix} \ddots & & 0 \\ & b_i(s - s_i) & \\ 0 & & \ddots \end{bmatrix} \tag{D.9}$$

Puisque $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ sont réelles , on montre aussi que si $(\mathbf{\Theta}_i, s_i)$ est une solution propre de (D.5) alors son complexe conjugué $(\mathbf{\Theta}_j, s_j)$, tel que $\mathbf{\Theta}_j = \mathbf{\Theta}_i^*$ et $s_j = s_i^*$, est aussi solution propre.

Représentation traditionnelle En reportant (D.2) dans (D.8) et en tenant compte de la forme de $\mathbb{A}$ et de $\mathbb{B}$ en fonction de $\mathbb{K}$, $\mathbb{D}$ et $\mathbb{M}$, les relations d'orthogonalité vérifiées par les vecteurs $\mathbf{\Phi}$

$$\begin{aligned} \mathbf{\Phi}_j^t \mathbb{K} \mathbf{\Phi}_i - s_i s_j \mathbf{\Phi}_j^t \mathbb{M} \mathbf{\Phi}_i &= \delta_{ij} a_i \\ \mathbf{\Phi}_j^t \mathbb{D} \mathbf{\Phi}_i + (s_i + s_j) \mathbf{\Phi}_j^t \mathbb{M} \mathbf{\Phi}_i &= \delta_{ij} b_i \end{aligned} \tag{D.10}$$

sont obtenues. Soit, sous forme matricielle

$$\begin{aligned} \overline{\Phi}^t \mathbb{K} \overline{\Phi} - [\mathbf{s}] \overline{\Phi}^t \mathbb{M} \overline{\Phi} [\mathbf{s}] &= [\mathbf{a}] \\ \overline{\Phi}^t \mathbb{D} \overline{\Phi} + \overline{\Phi}^t \mathbb{M} \overline{\Phi} [\mathbf{s}] + [\mathbf{s}] \overline{\Phi}^t \mathbb{M} \overline{\Phi} &= [\mathbf{b}] \end{aligned} \tag{D.11}$$

Considérons le cas où $\mathbf{\Phi}_i$ et $\mathbf{\Phi}_j$ sont complexes conjugués. Dans ce cas $s_j = s_i^*$. En écrivant la valeur propre s_i sous la forme traditionnelle

$$s_i = i\omega_i \sqrt{1 - \zeta_i^2} - \omega_i \zeta_i \tag{D.12}$$

et en remplaçant $\mathbf{\Theta}_j = \mathbf{\Theta}_i^*$ et $s_j = s_i^*$ dans (D.10), il vient

$$2Re(s_i) = -\frac{\mathbf{\Phi}_i^{*t} \mathbb{D} \mathbf{\Phi}_i}{\mathbf{\Phi}_i^{*t} \mathbb{M} \mathbf{\Phi}_i} = -\frac{d_i}{m_i} \quad = \quad -2\omega_i \zeta_i \tag{D.13}$$

$$Re(s_i)^2 + Img(s_i)^2 = \frac{\mathbf{\Phi}_i^{*t} \mathbb{K} \mathbf{\Phi}_i}{\mathbf{\Phi}_i^{*t} \mathbb{M} \mathbf{\Phi}_i} = \frac{k_i}{m_i} \quad = \quad \omega_i^2 \tag{D.14}$$

3 RÉSOLUTION DANS LE CAS NON HOMOGÈNE

3.1 Représentation par vecteur d'état

La solution du système (D.4) est recherchée sous forme de combinaison linéaire de modes propres $\mathbf{\Theta}_i$

$$\mathbf{X}(s) = \sum_{k=1}^{2N} q_k(s) \mathbf{\Theta}_k = \overline{\Theta} \mathbf{q}(s) \tag{D.15}$$

Dans ces conditions, l'équation (D.4) prémultipliée par $\overline{\Theta}^t$ donne

$$\overline{\Theta}^t \left[\ \mathbb{A} + s\mathbb{B} \ \right] \overline{\Theta} \mathbf{q}(s) = \overline{\Theta}^t \mathbf{Q}(s)$$

dont la solution est

$$\mathbf{q}(s) = \mathbb{R}^{-1}(s) \overline{\Theta}^t \mathbf{Q}(s) \tag{D.16}$$

avec

$$\mathbb{R}^{-1}(s) = \begin{bmatrix} \ddots & & 0 \\ & \frac{1}{b_i(s - s_i)} & \\ 0 & & \ddots \end{bmatrix}$$

Le report de (D.16) dans (D.15) permet d'obtenir la solution du problème, dans la représentation par vecteur d'état,

$$\mathbf{X}(s) = \overline{\Theta} \mathbf{q}(s) = \overline{\Theta} \mathbb{R}^{-1}(s) \overline{\Theta}^t \mathbf{Q}(s) \tag{D.17}$$

on en déduit donc d'après (D.4) que

$$\begin{aligned} \left[\ \mathbb{A} + s\mathbb{B} \ \right]^{-1} &= \overline{\Theta} \mathbb{R}^{-1}(s) \overline{\Theta}^t \\ &= \sum_{k=1}^{2N} \frac{\mathbf{\Theta}_k \mathbf{\Theta}_k^t}{b_k(s - s_k)} \end{aligned} \tag{D.18}$$

4 MATRICE DE GREEN NUMÉRIQUE

D'après le chapitre IV la matrice de Green correspond à l'inverse de la matrice $\mathbb{K} + s\mathbb{D} + s^2\mathbb{M}$. Pour calculer cet inverse on remarque, d'une part, que l'on peut exprimer le déplacement $\mathbf{U}(s)$ à partir du vecteur d'état $\mathbf{X}(s)$

$$\mathbf{U}(s) = \begin{bmatrix} \mathbb{I}_{NN} & 0_{NN} \end{bmatrix} \mathbf{X}(s)$$

et d'autre part, que par définition

$$\mathbf{Q}(s) = \begin{bmatrix} \mathbb{I}_{NN} \\ 0_{NN} \end{bmatrix} \mathbf{F}(s)$$

En remplaçant dans (D.17), on a donc

$$\mathbf{U}(s) = \begin{bmatrix} \mathbb{I}_{NN} & 0_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{A} + s\mathbb{B} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbb{I}_{NN} \\ 0_{NN} \end{bmatrix} \mathbf{F}(s)$$

et d'après (D.1), on en déduit, en faisant $s = i\omega$, que

$$\begin{aligned} \left(\mathbb{K} + i\omega\mathbb{D} - \omega^2\mathbb{M}\right)^{-1} &= \begin{bmatrix} \mathbb{I}_{NN} & 0_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{A} + i\omega\mathbb{B} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbb{I}_{NN} \\ 0_{NN} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbb{I}_{NN} & 0_{NN} \end{bmatrix} \overline{\Theta}\mathbb{R}^{-1}(i\omega)\overline{\Theta}^t \begin{bmatrix} \mathbb{I}_{NN} \\ 0_{NN} \end{bmatrix} \\ &= \overline{\Phi}\mathbb{R}^{-1}(i\omega)\overline{\Phi}^t \end{aligned}$$

Domaine fréquentiel Dès lors, il est possible d'écrire la matrice numérique de Green. Elle correspond à la réponse de la structure soumise à une sollicitation harmonique de pulsation ω

$$\mathbb{G}(\omega) = \left(\mathbb{K} + i\omega\mathbb{D} - \omega^2\mathbb{M}\right)^{-1} = \overline{\Phi} \begin{bmatrix} \ddots & & 0 \\ & \frac{1}{b_i(i\omega - s_i)} & \\ 0 & & \ddots \end{bmatrix} \overline{\Phi}^t \tag{D.19}$$

Domaine temporel La réponse impulsionnelle de la structure est calculée par simple transformée de Fourier. Puisque

$$\frac{1}{(i\omega - s_i)} \quad \text{a pour transformée de Fourier} \quad Y(t)e^{s_i t}$$

où $Y(t)$ représente l'échelon de Heaviside. On a simplement

$$\mathbb{G}(t) = h_{eav}(t)\,{}^n\overline{\Phi}(e^{[\mathbf{s}]t})\,{}^n\overline{\Phi}^t \tag{D.20}$$

où ${}^n\overline{\Phi}$ est la matrice des vecteurs propres normalisés définis par

$${}^n\overline{\Phi} = \overline{\Phi}\frac{1}{\sqrt{[\mathbf{b}]}}$$

E

Manuel d'utilisation de Modalys Objets éléments finis

INTRODUCTION

Une partie des résultats de cette thèse ont été implémentés dans le code informatique Modalys. Il s'agit principalement du calcul des modes d'une strucuture discrétisée par éléments finis. Modalys est daurénavant un code d'élément finis où il est possible de créer un maillage à partir de rien en utilisant des opérations géométriques de base (translation, rotation, extrusion,. . .). Un fois le maillage terminé, l'utilisateur crée un objet "élément finis" en lui associant des caractéristiques materielles (Young, Poisson,. . .), des paramètres de viscosité, et des condition aux limites. Le code C++ développé au laboratoire calcule les matrices élémentaires d'éléments finis isoparamètriques, les assemble et permet de résoudre un problème aux valeurs propres sur des systèmes de grande taille (100000 éléments). *In fine*, le son de ces structures en interaction est synthétisé. Le code donne aussi la possibilité de visualiser les résultats (déformées animées) et offre plusieurs possibilités de post-traitement. D'autres développements sont en cours, notamment les matrices de raideur géométrique associées au problème de la précontrainte. Bientôt d'autres éléments finis verront le jour (élément de plaque et coques).

A travers ce manuel, le lecteur est invité à saisir le lien qui existe entre les programme de re-

cherche et l’activité musicale des compositeurs. Le souci à l’Ircam étant de mettre à disposition, le plus rapidement possible, les outils issus de la recherche scientifique.

> Modalys is a sound synthesis software developed at Ircam for research and musical applications. This software allows one to build virtual instruments based on physical models to obtain the most entire range of expressive variations in the instrument in response to intuitive controls. An instrument, as a complex structure, is described by the mechanical/acoustical interaction of its components (strings, tubes, resonators, soundboard,...).
>
> Some new research have been done recently to extend the sound prediction to three-dimensional objects with the help of numerical methods. In particular, theoretical and numerical treatment of the unilateral and frictionless dynamic contact between two arbitrary elastic bodies was studied and highlighted by simulations implemented in Modalys. This manual presents the new functions dedicated to finite element objects.

1 (COMPUTE-MODES)

Description

This function calculates the mode of vibration of a finite element object. Mind the fact that each time a finite element object is defined, modes must be calculated in order to process a sound synthesis. This implies that the creation of a finite element object must be followed by the function **compute-modes**. It is not the case with other objects where this computation is implicitly done by *Modalys*.

Syntax

(**compute-modes** *my-finite-element-object*)

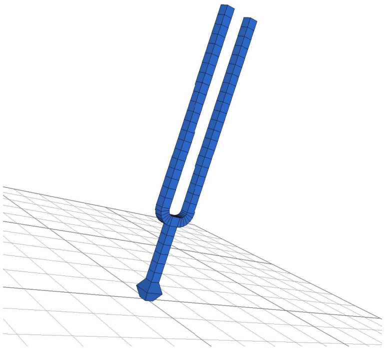
Parameters

my-finite-element-object The modes of vibration will be computed for this object.

Example

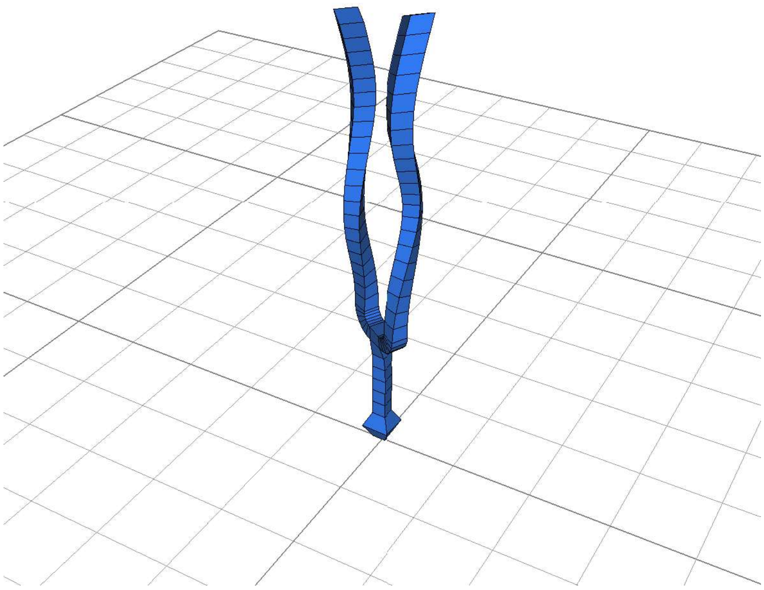
Read a file (for example `diapason.mesh`) in order to assign a mesh to a finite element object. Give the desired parameters (see the function **make-object ’finite-element. . .**) and visualize it :

```
(define diapason-mesh (make-mesh ’read-from-file "diapason.mesh"))
(define diapason-fem ( make-object ’finite-element (mesh diapason-mesh)
                                                   (modes 30)
                                                   (density 7700)
                                                   (young 2e11)
                                                   (poisson .3)
                                                   (freq-loss 0.1)
                                                   (const-loss 0.5)))
(view ’object diapason-fem)
```



Compute the modes of vibration and visualize one of them

```
(compute-modes diapason-fem)
(view 'mode diapason-fem 18 20 5)
```



In the *medit* application right click to obtain the main-menu and choose 'Play sequence' in the 'animation' sub-menu. Use also the 'm' key.

See also

view 'mode, make-object 'finite-element

2 (DUPLICATE 'HOMOTHETY)

Description

Constructs a mesh by duplication using an homothety. Points are extruded into lines, lines into quadrilaterals and quadrilaterals into hexahedras.

Syntax

(**duplicate 'homothety** *mesh rep. homothety-point homothety-amplitude*)

Parameters

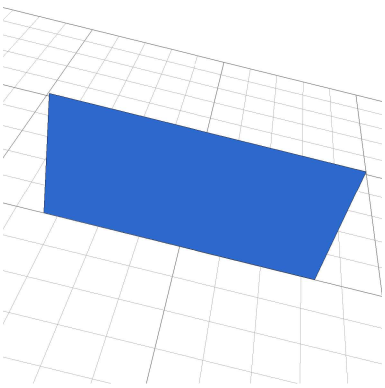
mesh	The mesh to be extruded by homothety. This mesh could be constituted of points, lines or quadrilaterals.
rep.	Number of extrusion.
homothety-point	Center homothety coordinates.
homothety-amplitude	Amplitude of the homthety

Example

Duplicate a quadrilateral into hexahedras by homothety

Define a mesh named `my-mesh` which contains a single quadrilateral (see **duplicate 'translation** for details) and visualize it

```
(define my-mesh ( make-mesh 'single-point (vector 0 0 0)))
(duplicate 'translation my-mesh 1 (vector 1 0 0))
(duplicate 'translation my-mesh 1 (vector 0 0 0.5))
(view 'mesh my-mesh)
```



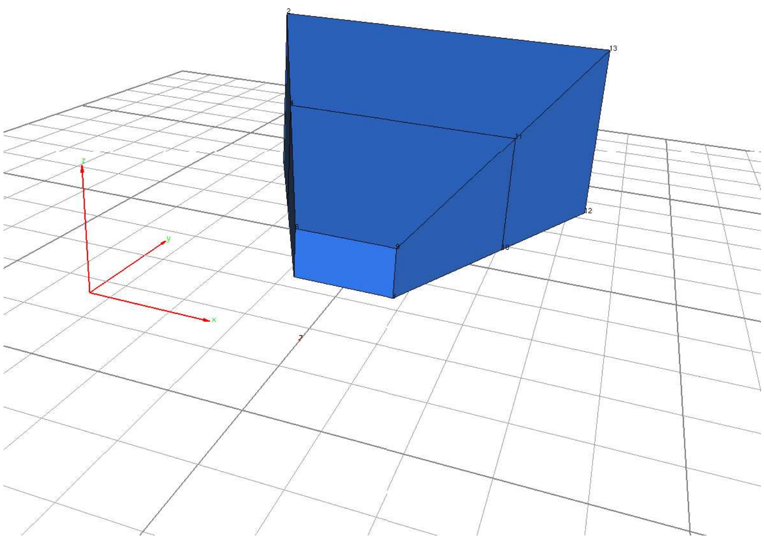
Duplicate the quadrilateral into hexahedras by an homothety

```
(duplicate 'homothety my-mesh 2 (vector 0.5 -1 0) 1.5 )
```

The mesh `my-mesh` contains now 2 hexahedras obtained by an homothety of center (x=0.5, y=1, z=0) with an amplitude 1.5. To see the result with the homothety center, define a mesh which contains the homothety point and add it to the previous mesh

```
(define center ( make-mesh 'single-point (vector 0.5 -1 0)))
(define my-mesh (make-mesh 'add (list my-mesh center)))
(view 'mesh my-mesh)
```

In the *medit* application use keys 'P' and 'g'.



See also

transform 'homothety, make-mesh, view.

3 (DUPLICATE 'REFLECTION)

Description

Constructs a mesh by duplication using a reflection. Points are extruded into lines, lines into quadrilaterals and quadrilaterals into hexahedras.

Syntax

(**duplicate 'reflection** *mesh normal invariant-point*)

Parameters

mesh	The mesh to be extruded by reflection. This mesh could consist of points, lines or quadrilaterals.
normal	The vector normal to the symetry plane.
invariant-point	Any point in the symetry plane.

Example

Duplicate a point into a line by reflection with the plane $z = 0$

Define a point

```
(define my-mesh ( make-mesh 'single-point (vector  0 0 1)))
```

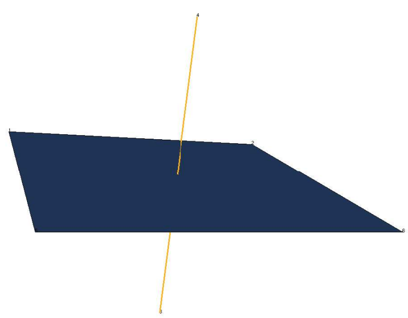
Duplicate the point into a line by reflection

```
(duplicate 'reflection my-mesh (vector 0 0 1) (vector 0 0 0))
```

The mesh `my-mesh` is now line of length 2 meters. To visualize the result with the symetry plane, construct a quadrilateral in the plane $z = 0$ and add it to the mesh line (see **duplicate 'translation** for details)

```
(define plane ( make-mesh 'single-point (vector  -1 -1 0)))
(duplicate 'translation plane 1 (vector  2 0 0))
(duplicate 'translation plane 1 (vector  0 2 0))
(define my-mesh (make-mesh 'add (list my-mesh plane)))
(view 'mesh my-mesh)
```

In the *medit* application use keys 'P' and 'g'.



See also

transform 'reflection, make-mesh, view.

4 (DUPLICATE ’ROTATION. . .)

Description

Constructs a mesh by duplication using a rotation. Points are extruded into lines, lines into quadrilaterals and quadrilaterals into hexahedras.

Syntax

(**Duplicate ’rotation** *mesh rep. rotation-axis orig angle*)

Parameters

mesh	The mesh to be extruded by rotation. This mesh could be made of by points, lines or quadrilaterals.
rep.	Number of extrusion.
rotation-axis	Axis of rotation. For instance the z-axis can be given by the vector `(vector 0 0 1)`.
orig	Origin of the rotation. The origin (x=0, y=0, z=0) is specified by `(vector 0 0 0)`.
angle	Angle of rotation in degrees.

Examples

Duplicate a point into lines by rotation

Define a mesh named `my-mesh` which contain a single point giving its coordinates :

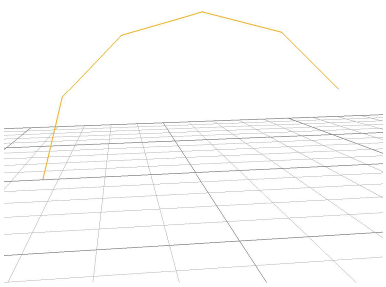
```
(define my-mesh ( make-mesh ’single-point (vector 0.1 0 0)))
```

Here the coordinates of the point are (x=0.1, y=0, z=0). Duplicate the point into lines

```
(duplicate ’rotation my-mesh 5 (vector 0 1 0)  (vector 0 0 0) 30)
```

The mesh `my-mesh` is now an arc which contains 5 lines generated by rotation of angle 30 degrees around the y-axis. Visualize the mesh :

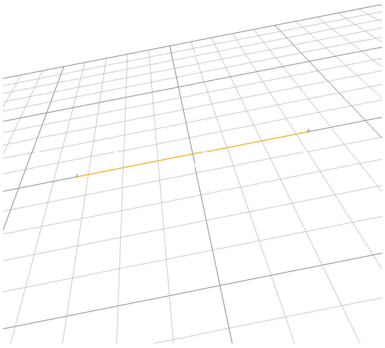
```
(view ’mesh my-mesh)
```



Duplicate a line into quadrilaterals

Define a line by translation of a point (see **duplicate 'translation. . .**).

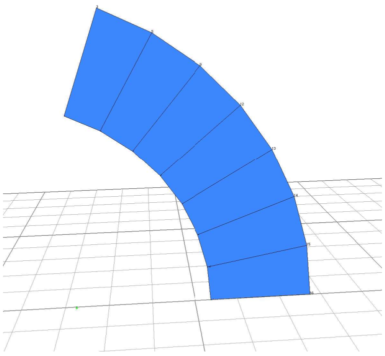
```
(define my-mesh ( make-mesh 'single-point (vector 0 0.1 0)))
(duplicate 'translation my-mesh 1 (vector 0 0.05 0))
(view 'mesh my-mesh)
```



Duplicate this line into quadrilaterals

```
(duplicate 'rotation my-mesh 7 (vector 1 0 0) (vector 0 0 0) 10)
(view 'mesh my-mesh)
```

The mesh `my-mesh` is now a surface which contains 7 quadrilaterals generated by rotation of angle 10 degrees around the x-axis.

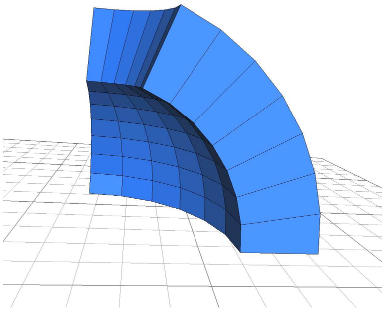


Duplicate quadrilaterals into hexahedras

Using the quadrilaterals from the previous example generate hexahedras by rotation

```
(define my-mesh ( make-mesh 'single-point (vector 0 0.1 0)))
(duplicate 'translation my-mesh 1 (vector 0 0.05 0))
(duplicate 'rotation my-mesh 7 (vector 1 0 0) (vector 0 0 0) 10)

(duplicate 'rotation my-mesh 6 (vector 0 0 1) (vector 0 0 0) 15)
(view 'mesh my-mesh)
```



The mesh `my-mesh` is now a volume which contains 42 hexahedras generated by rotation of angle 15 degrees around the z-axis.

See also

duplicate 'translation, make-mesh, transform, view.

5 (DUPLICATE 'TRANSLATION...)

Description

Constructs a mesh by duplication using a translation. Points are extruded into lines, lines into quadrilaterals and quadrilaterals into hexahedras.

Syntax

(**Duplicate 'rotation** *mesh rep. translation-vector*)

Parameters

mesh	The mesh to be extruded by translation. This mesh could contain points, lines or quadrilaterals.
rep.	Number of extrusion.
translation-vector	vector of translation. For instance translation in the z-direction of length O.1 meter is given by the vector `(vector 0 0 0.1)`.

Examples

Duplicate a point into lines by translation

Define a mesh named `my-mesh` which contain a single point giving its coordinates :

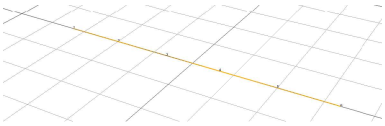
```
(define my-mesh (make-mesh 'single-point (vector 0.1 0 0)))
```

Here the coordinates of the point are (x=0.1, y=0, z=0). Duplicate the point into lines

```
(duplicate 'translation my-mesh 5 (vector 0 0.1 0))
```

The mesh `my-mesh` is now a line which contains 5 segments of length 0.1 meter generated by translation along the y-axis. Visualize the mesh :

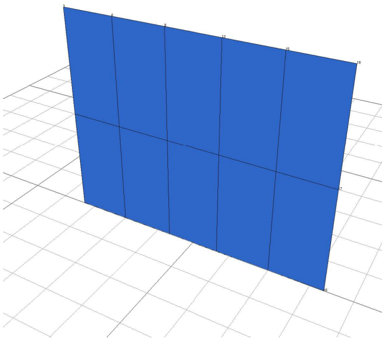
```
(view 'mesh my-mesh)
```



Duplicate the previous line into quadrilaterals

```
(duplicate 'translation my-mesh 2 (vector 0 0 0.2))
(view 'mesh my-mesh)
```

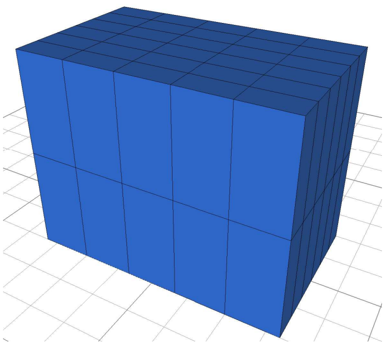
The 5 segments generate, in the z-direction, a surface mesh named `my-mesh` of 10 quadrilaterals (5×2). Each quadrilateral has a surface of 0.1×0.2 meter^2.



Duplicate the previous quadrilaterals into hexahedras

Take the quadrilaterals from the previous example and generate hexahedras by translation

```
(duplicate 'translation my-mesh 6 (vector -0.05 0 0))
(view 'mesh my-mesh)
```



The mesh `my-mesh` is now a volume which contains 60 hexahedras generated by translation of the previous surface in the x-direction.

See also

duplicate 'rotation, make-mesh, transform, view.

6 (MAKE-MESH 'ADD)

Description

Add two or several meshes.

Syntax

(**make-mesh 'add** *list-of-meshes*)

Parameters

list-of-meshes The meshes to be added together.

Example

```
(define sum-mesh (make-mesh 'add (list mesh1 mesh2 mesh3)))
(view 'mesh sum-mesh)
```

See also

duplicate 'reflection

7 (MAKE-MESH 'COPY)

Description

Copy a mesh

Syntax

(**make-mesh 'copy** *mesh*)

Parameters

mesh The mesh to be copied.

Example

```
(define my-mesh2 (make-mesh 'copy my-mesh1))
```

See also

fem-example

8 (MAKE-MESH 'READ-FROM-FILE. . .)

Description

Syntax

(**make-mesh 'read-from-file** *filename*)

Parameters

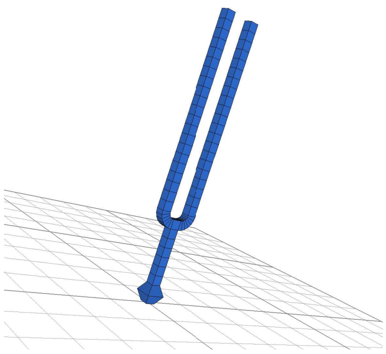
filename Name of mesh data file in quotes, *i.e.*"my-mesh". The mesh file must conform to the INRIA mesh format to be able to visualize it with *Modalys*. (see the web page dedicated to *medit* http ://www-rocq1.inria.fr/gamma/medit/medit.html).

Discussion

For the time being, *Modalys* is able to deal with only one type of finite element : hexahedra. To create an object with an external mesh file, you must eventually end with a mesh containing only hexahedras. In the future, extensions will be made to be able to use other types of finite element.

Example

```
(define my-mesh ( make-mesh 'read-from-file "diapason.mesh"))
(view 'mesh my-mesh)
```



See also

view, make-mesh, medit.
See also the GTS GNU project located at http ://gts.sourceforge.net/samples.html.

9 (MAKE-MESH 'RESTRICT-EDGE)

Take an edge (or several edges) from a mesh to make a new mesh. This function is helpful to extract a sub mesh from an original mesh. The result is an edge (or a list of edges).

Description

Syntax

(**make-mesh ’restrict-edge** *mesh edges*)

Parameters

mesh	The original mesh from which a sub mesh is to be extracted.
edge(s)	The edges to be extracted given by a vector of number of nodes

Example

```
(define sub-mesh (make-mesh ’restricted-edge (vector 1 2 3 4 1)))
```

See also

For details see **make-mesh ’restricted-point**

10 (MAKE-MESH ’RESTRICT-PLANE)

Description

Take all the quadrilaterals that belong in a plane from a mesh. This function is helpful to extract a sub mesh from an original 3D mesh. The result is a mesh of quadrilaterals.

Syntax

(**make-mesh ’restrict-plane** *mesh normal invariant-point*)

Parameters

mesh	The original mesh from which a sub mesh is to be extracted.
normal	The vector normal to the plane.
invariant-point	Any point in the plane.

Example

```
(define sub-mesh (make-mesh ’restrict-plane my-mesh
(vector 1 0 0) (vector 0 0 0)))
```

See also

For details see **make-mesh ’restrict-point, make-mesh ’finite-element.**

11 (MAKE-MESH 'RESTRICT-POINT)

Description

Take a point (or several points) from a mesh to make a new mesh. This function is helpful to extract a sub mesh from an original mesh.

Syntax

(**make-mesh 'restrict-point** *mesh point(s)*)

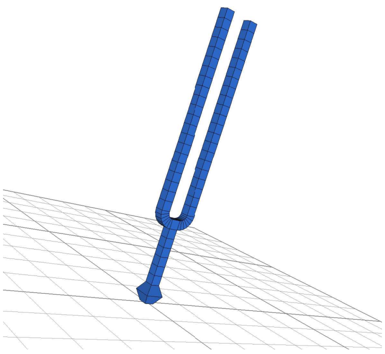
Parameters

mesh	The mesh from which the point (or list of point) is (are) extracted.
point(s)	The point (or a list of point) given by its (their) number(s) in the mesh (see **wiew 'mesh** to visualize the numbering).

Example

Build your own mesh using the mesh tools : **duplicate. . . , add, make-mesh. . .**) or simply read a file (for example `diapason.mesh`) and visualize it

```
(define diapason (make-mesh 'read-from-file "diapason.mesh"))
(view 'mesh diapason)
```



Extract a point

```
(define point3 (make-mesh 'restrict-point diapason 3))
```

or a list of point

```
(define points (make-mesh 'restrict-point diapason (vector 1 2 3)))
```

to define two finite element objects blocked by different ways

```
(define fem1 (make-object 'finite-element (mesh diapason) (block point3)))
(define fem2 (make-object 'finite-element (mesh diapason) (block points)))
```

Visualize the objects

```
(view 'object fem1)
(view 'object fem2)
```

Use the key 'c' and 'g' in the *medit* application to see the choosen boundaries.

See also

make-mesh, duplicate, add, .

12 (MAKE-MESH ’RESTRICT-QUADRILATERAL)

Take an quadrilateral from a mesh to make a new mesh. This function is helpful to extract a sub mesh from an original mesh. The result is a quadrilateral.

Description

Syntax

(**make-mesh ’restrict-quadrilateral** *mesh quadrilateral*)

Parameters

mesh	The original mesh from which a sub mesh is to be extracted.
quadrilateral(s)	The quadrilateral to be extrated given by a vector of its nodes

Example

```
(define sub-mesh (make-mesh ’restricted-quadrilateral (vector 1 2 3 4)))
```

See also

For details see **make-mesh ’restricted-point**

13 (MAKE-MESH ’SINGLE-POINT)

Description

Syntax

(**make-mesh ’single-point** *position-vector*)

Parameters

position-vector	This parameter gives the coordinates of a point relative to an orthogonal Cartesian coordinate system Oxyz.

Discussion

Starting from a point, a complex finite element mesh can be obtain using the **duplicate**, **transform** and **add** functions (see examples).

Example

Define a mesh named `my-mesh` which contain a single point giving its coordinates :

```
(define my-mesh ( make-mesh 'single-point (vector 0.1 0 0)))
```

Here the coordinates of the point are (x=0.1, y=0, z=0).

See also

duplicate, transform, add.

14 (MAKE-OBJECT 'FINITE-ELEMENT)

Description

This function is used to create a finite element object. Its sound properties depend on the geometry (mesh), on the material parameters (density, young's modulus , poisson ration, loss parameters) and on boundary conditions (the fixed part of the mesh). The dynamical behavior of this object is described by the modal theory : the number of requested modes can be specified by the user.

Syntax and default

(**make-object 'finite-element** *(key value)*)

```
(make-object 'finite-element (mesh my-mesh)
                             (block my-sub-mesh)
                             (modes 40)
                             (density 7800)
                             (young 2e11)
                             (poisson 0.3)
                             (freq-loss 1)
                             (const-loss 1)))
```

Parameters

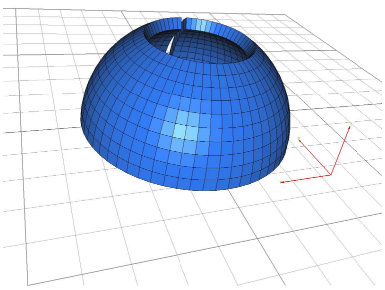
key	Value
mesh	The mesh of the finite element object. This mesh can be obtained using the function **make-mesh** and the *Modalys*'s mesh tools : **duplicate, transform**. For the time being, *Modalys* is able to deal with only one type of finite element : hexahedra. Thus, the user must give here a mesh which contains only hexahedras. In the future, extensions will be made to extend the types of handled finite elements (tetrahedras, beams, plates etc)
block	The part of the mesh to be constrained. A part (or all) of the surface of the finite element mesh (points, edges or plane) can be fixed during the sound synthesis. The dynamic behavior of an objet (and thus its sound) can be completly different depending on the definition of this fixed topology. This sub mesh can be defined using the function **make-mesh 'restrict...**.

key	Value
modes	This value determines the number of modes of vibration computed in the simulation of the object. As this number is increased, higher partials are added to the resultant sound. Thus, if ten modes are declared, the lowest ten frequencies produced by the vibration of the object are computed (see funcnamecompute-modes). Maximum detail is obtained when the number of modes is high enough so that all frequency below the Nyquist frequency are accounted for.
density	Density of the material in kg/m^3. Some typical values are Oak 720 Brass 8500 Glass 2300 Nickel 8800 Quartz 2650 Copper 8900 Aluminium 2700 Silver 10500 Steel 7700
young	Young'smodulus, in N/m^2. This parameter is related to the elasticity of the material. A rigid material gets higher values. Some typical values are Glass 6.2e10 Brass 1.04e11 Quartz 7.9e10 Nickel 2.1e11 Aluminium 7e10 Copper 1.2e11 Steel 2e11 Silver 7.8e10
poisson	Poisson ratio of the material, from 0 to 1. With a value of 1 the material keep a constant volume when a deformation occurs (imagine a ballon plenty of water). Lowered values authorize a loss in the total volume when a compression is done on the material.
freq-loss	
const-loss	

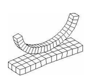
Example

Define a mesh named `my-mesh` to declare a finite element object (see **make-mesh, duplicate**)

```
(define my-mesh (make-mesh 'single-point (vector 0.1 0 0)))
(duplicate 'translation my-mesh 1 (vector .013 0 0))
(duplicate 'rotation my-mesh 10 (vector 0 1 0) (vector 0 0 0) 6 )
(duplicate 'rotation my-mesh 59 (vector 0 0.0 1) (vector 0 0 0) 6 )
(view 'mesh my-mesh)
```

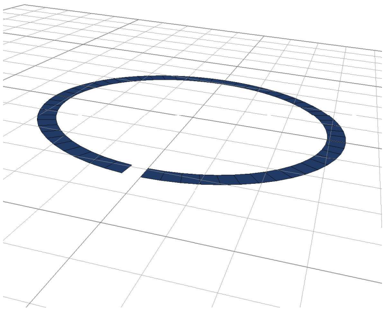


Select a part of the mesh `my-mesh`



```
(define my-sub-mesh (make-mesh 'restrict-plane my-mesh (vector  0 0 1)
(vector 0 0 0)))
(view 'mesh my-sub-mesh)
```

The mesh named `my-sub-mesh` represents the plane of equation $z = 0$ (the ground here) restricted to the mesh `my-mesh`



Define a finite element objet using the mesh `my-mesh`, block the sub mesh `my-sub-mesh` and ask for 30 modes

```
(define my-fem (make-object 'finite-element (mesh my-mesh)
(block my-sub-mesh) (modes 30)))
(view 'object my-fem)
```

To visualize the mesh and the sub mesh use 'c' and 'e' in the *medit* application (see Fig E.1). Note that here the material parameters (density, young, poisson) and the losses are the defaults ones. You can check them in the `toplevel.scm` file in the `mos/init/elk` directory

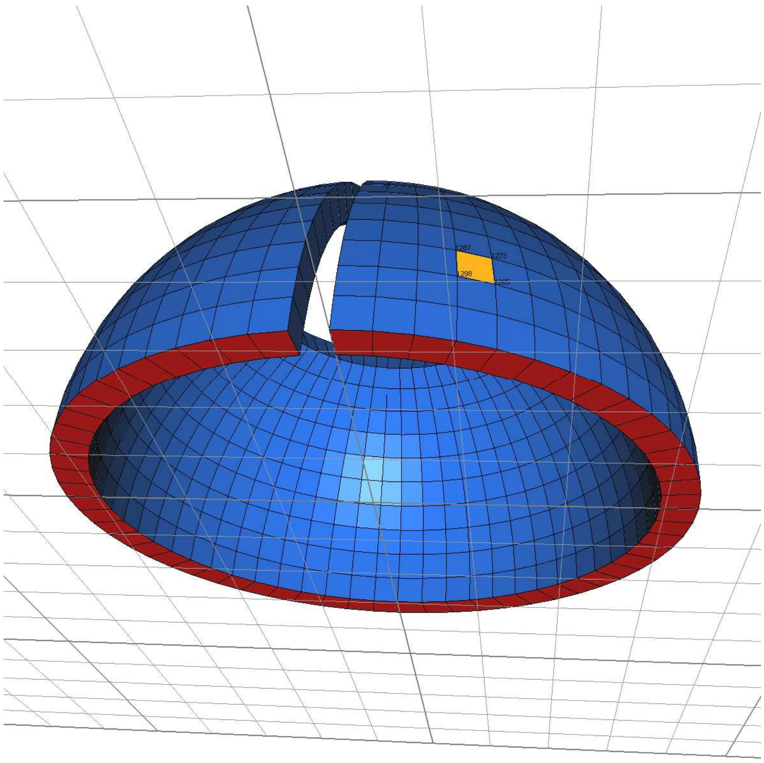


FIG. E.1. To obtain the number of a node, visualize the finite element object using the **view 'object** command and *shift click* the facet of interest

Notes

The function **make-access** (see *Modalys Reference*) can be used on a finite element object. Three direction can be declared : `'normal`, `'trans0` or `'trans1`. For example the instruction

```
(define my-fem-access1( make-access my-finite-element
(const 1298) 'normal ))
```

make an access on the 1298th node of the finite element mesh in a direction normal to its surface. An access can be declared in the tangential direction of the surface giving two node numbers :

```
(define my-fem-access1( make-access my-finite-element
(const 1298 1285) 'trans0 ))
```

An access is created at node 1298 in the tangent plane pointing through the node 1285. Using `'trans1` the access is still in the tangent plane but points in the perpendicular direction. If you are accustomed to the decoded notation, please note the ith point of the mesh is referenced by the 3 values at $3i, 3i+1, 3i+2$ in the decoded array. The 3 components represent the projection of the movement wished on the x-axis, y-axis and z-axis.

To obtain a node number, see the figure E.1). The *medit* application can return, in the console, the coordinates of the vertices of a facet and their numbers within the mesh :

```
 Picking result :
  Quad    731 : 1298, 1287, 1273, 1285    ref : 0 [DEFAULT_MAT]
```

```
vertex    1298 : 0.105121 0.034156 0.023494   ref 0
vertex    1287 : 0.102209 0.033210 0.034919   ref 0
vertex    1273 : 0.098178 0.043712 0.034919   ref 0
vertex    1285 : 0.100975 0.044957 0.023494   ref 0
```

All the functions **make-connection . . .** can be used with a finite element object (except **make-connection 'hole** which does not make sens). A finite element object can be stroke, bowed, plucked, . . . with an other *Modalys* object included an other finite element object.

See also

make-mesh, set-physical, view 'object.

15 (SAVE-MESH)

Description

Save the mesh data in a file

Syntax

(**save-mesh** *mesh filename*)

Parameters

mesh	Name of the mesh to be saved
filename	name of destination file (in quote)

Example

Create a mesh named `my-mesh` using the mesh tools (see **duplicate 'rotation** for example) and save the mesh

```
(save-mesh my-mesh "rotate.mesh")
```

Mind the fact that the file format is the INRIA mesh format (see the web page dedicated to *medit* http ://www-rocq1.inria.fr/gamma/medit/medit.html).

See also

make-mesh 'read-from-file

16 (SET-PHYSICAL)

Description

Set some material properties to a finite element object . This function can be used to avoid to redefine a finite element object. The function **compute-mode** must be applied in order to take into account the new material properties.

Syntax and default

(**set-physical** *modalys-object (key value)*)

```
(set-physical my-object (density 7800)
                        (young 2e11)
                        (poisson 0.3))
```

Parameters

modalys-object	The modalys object to be updated.
key	Value
density	Density of the material in kg/m^3. Some typical values are

Oak	720	Brass	8500
Glass	2300	Nickel	8800
Quartz	2650	Copper	8900
Aluminium	2700	Silver	10500
Steel	7700		

young	Young'smodulus, in N/m^2. This parameter is related to the elasticity of the material. A rigid material gets higher values. Some typical values are

Glass	6.2e10	Brass	1.04e11
Quartz	7.9e10	Nickel	2.1e11
Aluminium	7e10	Copper	1.2e11
Steel	2e11	Silver	7.8e10

poisson	Poisson ratio of the material, from 0 to 1. With a value of 1 the material keeps a constant volume when a deformation occurs (picture yourself a balloon plenty of water). Lower values permit a loss in the total volume when a compression is done on the material.

See also

make-object 'finite-element

17 (TRANSFORM 'HOMOTHETY)

Description

Transform a mesh by homothety.

Syntax

(**transform 'homothety** *mesh homothety-point homothety-amplitude*)

Parameters

mesh	The mesh to be transformed by homothety.
homothety-point	Center homothety coordinates.
homothety-amplitude	Amplitude of the homthety.

Example

```
(transform 'homothety my-mesh (vector 0.5 -1 0) 1.5 )
```

See also

duplicate 'homothety

18 (TRANSFORM 'REFLECTION)

Description

Transform a mesh by reflection.

Syntax

(**transform 'reflection** *mesh normal invariant-point*)

Parameters

mesh	The mesh to be transformed by reflection.
normal	The vector normal to the reflection plane.
invariant-point	Any point in the reflection plane.

Example

```
(transform 'reflection my-mesh (vector 0 0 1) (vector 0 0 0))
```

See also

duplicate 'reflection

19 (TRANSFORM 'ROTATION...)

Description

Transform a mesh by rotation.

Syntax

(**Transform 'rotation** *mesh rotation-axis orig angle*)

Parameters

mesh	The mesh to be transformed by rotation.
rotation-axis	Axis of rotation. For instance the x-axis can be given by the vector `(vector 1 0 0)`.
orig	Origin of the rotation. The origin (x=0, y=0, z=0) is specified by `(vector 0 0 0)`.
angle	Angle of rotation in degrees.

Example

```
(transform 'rotation my-mesh (vector 0 1 0)  (vector 0 0 0) 30)
```

See also

transform 'translation, make-mesh, transform, view.

20 (TRANSFORM 'TRANSLATION. . .)

Description

Transform a mesh by translation.

Syntax

(**Transform 'rotation** *mesh translation-vector*)

Parameters

mesh	The mesh to be transformed by translation.
translation-vector	vector of translation. For instance a translation in the y-direction of length 0.1 meter is given by the vector `(vector 0 0.1 0)`.

Example

```
(transform 'translation my-mesh (vector 0 0.1 0))
```

See also

duplicate 'rotation

21 (VIEW 'MESH)

Description

Visualize a mesh. The *Modalys* application launch the *medit* application to visualize a mesh. This application can be downloaded at http ://www-rocq1.inria.fr/gamma/medit/medit.html.

Syntax

(**view 'mesh** *mesh*)

Parameters

mesh	Name of the mesh to be visualized

Examples

Create a mesh named `my-mesh` using the mesh tools (see **duplicate 'rotation** for example) and visualize it

```
(view 'mesh my-mesh)
```

See also

view 'mode, view 'object

22 (VIEW 'MODE)

Description

Animate a mode of vibration.

Syntax

(**view 'mode** *finite-element-object num-mode num-frame rep. [amp]*)

Parameters

finite-element-object	The finite element object for which a mode is to be visualized
num-mode	Number of the mode to be animated
num-frame	Number of frames in the movie for one oscillation
rep.	Number of oscillations
[amp]	Amplication coefficient (optional). A default is computed to fit in the window

Example

See the command

```
(view 'mode diapason-fem 18 20 5)
```

in the **compute-mode** example. Right click in the *medit* application to obtain the main-menu. Choose 'Play sequence' in the 'animation' sub-menu.

See also

compute-mode

23 (VIEW 'OBJECT)

Description

Visualize an object with the choosen boundaries.

Syntax

(**view 'object** *my-finite-element*)

Parameters

my-finite-element	The finite element object to be visualized.

Examples

```
(view 'object my-fem)
```

See also

For details see **make-object 'finite-element**

24 FEM-EXAMPLE

```
(new)
(define side 0.002)
(define r 7 )
(define s 21 )
(define h (* 2.2 r side ))

(define base ( make-mesh 'single-point (vector side side 0) ))
(duplicate 'translation base 1 (vector (* -2 side) 0 0))
(duplicate 'translation base 1 (vector 0 (* -2 side)  0))
(duplicate 'homothety base 1 (vector 0 0 ( * 2 side)) 1 )
(define base_inv (make-mesh 'copy base ))
(transform 'reflection base_inv (vector 0 0 1) (vector 0 0 ( * -2 side )))
(define base (make-mesh 'add (list base base_inv)))

(define diapason (make-mesh 'single-point (vector side side 0)))
(duplicate 'translation diapason 1 (vector (* -2 side) 0 0))
(duplicate 'translation diapason 1 (vector 0 (* -2 side) 0))
(duplicate 'translation diapason r (vector 0 0 (* 2 side) ))

(define arc (make-mesh 'restrict-quadrilateral diapason
(vector (+ 4 (* 4 r )) (+ 2 (* 2 r)) (+ 1 (* 2 r)) ( + 3 (* 4 r)))))
(duplicate 'rotation arc 6 (vector 1 0 0) (vector 0 side h) 15)

(define branch (make-mesh 'restrict-plane arc (vector 0 0 1) (vector 0 0 h)))
(duplicate 'translation branch s (vector 0 0 (* 2 side)))

(define fork (make-mesh 'add (list arc branch)))
(define fork-copy (make-mesh 'copy fork))
(transform 'reflection fork-copy (vector 0 1 0) (vector 0 0 0))

(define diapason (make-mesh 'add (list base diapason fork fork-copy )))

(save-mesh diapason "diapason.mesh")

(view 'mesh diapason )


(define hold (make-mesh 'restrict-quadrilateral diapason
(vector 63 189 188 62)))
```

```
(define my-finite-element (make-object 'finite-element (mesh diapason)
                                                        (modes 25)
                                                        (block hold)
                                                        (young 19.5e10)
                                                        (density 7700)
                                                        (poisson 0.2)
                                                        (freq-loss 0)
                                                        (const-loss 0)))

;(view 'object my-finite-element )

(compute-modes my-finite-element )

(set-mode-freq! my-finite-element 0 0)
(set-mode-freq! my-finite-element 1 0)

(save-object my-finite-element "diapason.modal" )

(view 'mode my-finite-element 3 10 3 )

(define my-fem-access-in ( make-access my-finite-element
(const 120) 'normal ))
(define my-fem-access-out ( make-access my-finite-element
(const 15) 'normal ))

(define my-plectrum (make-object 'bi-two-mass))

;;;
;;; make pluck connection
;;;

(define my-plectrum-plk (make-access my-plectrum (const 1) 'trans0))

(make-connection 'pluck my-fem-access-in my-plectrum-plk 0 .1 (const 50))

;;;
;;; make position connection to push plectrum
;;;

(define my-plectrum-mov (make-access my-plectrum (const 0) 'trans0))

(make-connection 'position my-plectrum-mov
                 (make-controller 'envelope 1
                                  (list (list 0.00   .1)
                                        (list 0.50  -.5))))

;;;
;;; make listening point on string
;;;
```

```
(make-point-output my-fem-access-out)

;;;
;;; run the synthesis and play the sound
;;;

(run 2)    ;; make 2 seconds of sound

(play)

(save "diapason.aiff")
```

Table des figures

Liste des tableaux

Bibliographie

[1] A.C. Eringen and E.S. Suhubi. *Elastodynamics*, volume I-finite motions. Academic Press, New York, 1975.

[2] P. Germain. *Cours de Mécanique des milieux continus*. Masson, Paris, 1976.

[3] J. Salençon. *Mécanique des milieux continus*. Ellipse, Paris, 1988.

[4] M. Bruneau. *Manuel d'acoustique fondamentale*. Hermes, Paris, 1998.

[5] J. Garrigues. Mécanique des milieux continus. Cours de l'Ecole Supérieure de Mécanique de Marseille. http ://esm2.imt-mrs.fr/gar/, 2001.

[6] G. Duvaut and J.L. Lions. *Les inéquations en mécanique et en physique*. Dunod, Paris, 1972.

[7] R. Ohayon and C. Soize. *Structural acoustics and vibration*. Academic Press, 1998.

[8] R. Dautray and J.L. Lions. *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques*. Masson, Paris, 1984. tome I pp. 194-201.

[9] R. Dautray and J.L. Lions. *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques*. Masson, Paris, 1984.

[10] P.G. Ciarlet. *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*. Masson, Paris, 1990.

[11] B.B. Baker and E.T. Copson. *The mathematical theory of Huygens' principle*. Clarendon, Oxford, 1950.

[12] D.S. Jones. *The theory of electromagnetism*. Pergamon, Oxford, 1964.

[13] V.D. Kupradze. *Dynamical problems in elacticity, progess in solid mechanics*. I.N. Sneddon and R. Hill, North-Holland Amsterdam, 1963.

[14] A.T. de Hoop. *Representation theorems for the displacement in an elastic solid and their application to elastodynamic diffraction theory*. PhD thesis, Technische Hogeschool, Delft, 1958.

[15] L.T. Wheeler and E. Sternberg. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 31 :51–90, 1968.

[16] A.E.H. Love. In *Proc. R. Math. Soc.*, volume 1 of *2*, page 291, London, 1904.

[17] M. Bonnet. *Equations intégrales et éléments de frontière*. CNRS éditions/Eyrolles, Paris, 1995.

[18] C.A. Brebbia. *Topics in boundary element research Volume 01-02*. Springer-Verlag, Berlin ; New York, 1985.

[19] A.C. Eringen and E.S. Suhubi. *Elastodynamics*, volume II-linear theory. Academic Press, New York, 1975.

[20] P.M. Morse and H. Feshbach. *Methods of mathematical physics*, volume Part I. Mc Graw Hill, New York, 1953. pp 803-814.

[21] V.A. Kozlov, V.G. Maz'ya, and J. Rossmann. *Elliptic boundary value problems in domains with point singularities*. American Mathematical Society, Rhode Island, 1997.

[22] H. Lamb. On the propagation of tremors over the surface of an elastic solid. *Phil. Trans. R. Soc.*, A203 :1–42, 1904.

[23] K. F. Graff. *Wave Motion in Elastic Solids*, chapter 2. Dover Publications, Inc., New York, 1975.

[24] A. Alastuey. Méthodes théoriques pour la physique. Cours de DEA de physique statistique et phénomènes non linéaires de l'ENS Lyon.

[25] K. J. Bathe. *Finite element procedures in engineering*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1982.

[26] O.C. Zienkiewicz and R. L. Taylor. *The finite Element Method*, volume 1 and 2. McGraw-Hill, 4th edition, 1991.

[27] J. F. Imbert. *Analyse des structure par éléments finis*. Cepadues, Toulouse, France, 1984.

[28] M. Géradin and D.Rixen. *Théorie des vibrations. Application à la dynamique des structures*. Masson, 1993.

[29] W. E. Arnoldi. The principle of minimized iterations in the solution of the matrix eigenvalue problem. *Quart. Appl. Math.*, 9 :17–29, 1951.

[30] R. B. Lehoucq. *Analysis and Implementation of an Implicitly Restarted Arnoldi Iteration*. PhD thesis, Rice University, Houston, TX, 1995.

[31] Z. Jia. Polynomial characterizations of the approximate eigenvectors by the refined arnoldi method and an implicitly restarted refined arnoldi algorithm. *Linear Algebra Appl.*, 287 :191–214, 1998.

[32] Z. Jia. A refined iterative algorithm based on the block arnoldi process for large unsymmetric eigenproblems. *Linear Algebra Appl.*, 270 :171–189, 1998.

[33] R. B. Lehoucq D. C. Sorensen and C. Yang. Arpack users' guide : Solution of large-scale eigenvalue problems with implicitly restarted arnoldi methods. Technical report, SIAM, Phildelphia, 1998.

[34] I. Babuska and J.M. Melenk. The partition of unity method. *Comput. Methods Appl. Mech.Engrg*, pages 289–314, 1996.

[35] F. Ihlenburg. *Finite element analysis of acoustic scattering*. Springer, 1998.

[36] J. Bensoam, N. Misdariis, C. Vergez, and R. Caussé. Formulation intégrale et technique des éléments finis appliquées à la synthèse sonore par modèles physiques : Représentations intégrales utilisant la fonction de green et le noyau de poisson. In *CFA : Congrès Français d Acoustique*, Lille, France, 2002. SFA.

[37] D.J. Ewins. *Modal testing : Theory and practice*. Bruël & Kjaer, 1986.

[38] T.A. Laursen and V. Chawla. Design of energy conserving algorithms for frictionless dynamics contact problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 40 :863–886, 1997.

[39] P. Chabrand, O. Chertrier, and F. Dubois. Complementarity methods for multibody friction contact problems in finite deformations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2001.

[40] N. Kikuchi and J.T. Oden. *Contact Problems in Elasticity : A Study of variational Inequalities and Finite Element Methods*. Siam, Philadelphia, 1988.

[41] R. Glowinsky, J.L. Lions, and R. Tremolières. *Analyse numériques des inéquations variationnelles*. Dunod, Paris, 1976.

[42] J. Bensoam. A reciprocal variational approach to the two-body frictionless contact problem in elastodynamics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2003. submitted.

[43] A. Signorini. Sopra alcune questioni di elastostatica. In *Atti della Societa Italiana per il Progresso delle Scienze*, 1933.

[44] A. Signorini. Questioni di elasticità nonlinearizzata e semi linearizzata. In *Rend. de Matematica*, Rome, 1959.

[45] G. Fichera. Unilateral constraints in elasticity. In *Actes Congrès Int. Math.*, volume 3, pages 79–84, 1970.

[46] T.J.R. Hughes, R. L. Taylor, J. L. Sackman, A. Curnier, and W. Kanoknukulchai. A finite element method for a class of contact-impact problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 8 :249–276, 1976.

[47] J.A.C Martins and J.T. Oden. A numerical analysis of a class of problems in elastodynamics with friction. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 40 :327–360, 1983.

[48] D. Talaslidis and P. D. Panagiotopoulos. A linear finite element approach to the solution of variational inequalities arising in contact problems of structural dynamics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 18 :1505–1520, 1982.

[49] H. Antes and P. D. Panagiotopoulos. *The boundary integral approach to static and dynamic contact problems : equality and inequality methods*. BirkhAuser, Basel ; Boston, 1992.

[50] R.L. Taylor and P. Papadopoulos. On a finite element method for dynamic contact/impact problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 36 :2123–2140, 1993.

[51] T.A. Laursen and J.C. Simo. A continuum-based finite element formulation for the implicit solution of multibody, large deformation frictional contact problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 36 :3451–3485, 1993.

[52] V. Chawla and T.A. Laursen. Energy consistent algorithms for frictional contact problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 42 :799–827, 1998.

[53] J. Bensoam, C. Vergez, N. Misdariis, and R. Caussé. Formulation intégrale et technique des éléments finis appliquées à la synthèse sonore par modèles physiques. In *XVème Congrès Français de Mécanique*, number 453, Nancy, 2001. CFM.

[54] P.O. Mattei and D. Habault. Transitoires de plaques. In *CFA : Congrès Français d Acoustique*, Lille, France, 2002. SFA.

[55] J. M. Adrien, R. Caussé, and E. Ducasse. Sound synthesis by physical models, application to strings. In *AES Proceedings*, Paris, March 1988. AES.

[56] J. M. Adrien and J. Morison. Mosaic : A modular program for synthesis using modal superposition. In *Modèles Physiques : Création Musicale et Ordinateur*, volume 2, pages 371–384, Grenoble, 1990. ACROE.

[57] J. Bensoam, C. Vergez, N. Misdariis, and R. Caussé. Integral formalism and finite element method applied to sound synthesis by physical modeling. In *17th ICA proceedings*, Rome, 2001. ICA.

[58] Michel Bruneau. *Introduction aux théorie de l'acoustique*. Université du Maine, 1983.

[59] L.H. Chen and D.G. Schweikert. Sound radiation from an arbitrary body. *Acoustical Society of America*, 35(10) :1626–1632, 1963.

[60] C. Do. On the dynamic deformation of a bar against an obstacle. In Siavouche.Ed. Nemat-Nasser, editor, *Variational Methods in the Mechanics of Solids : proceedings*, Oxford ; New York ; Toronto, 1980. Pergamon press.

[61] M. A. Hamdi. *Rayonnement acoustique des structures*, chapter 9. Eyrolles, Paris, 1988.

[62] M. Jean. Dynamics of rigid bodies with dry friction. In G. Del Piero and F. Maceri, editors, *Unilateral problems in structural analysis IV : proceedings of the Fourth Meeting on Unilateral Problems in Structural Analysis*, Basel ; Boston, 1991. BirkhAuser Verlag.

[63] J.N Reddy. *Applied functional analysis and variational methods in engineering*. 1985.

[64] M. Schatzman. A hyperbolic problem of second order with unilateral constraints : The vibrating string with a concave obstacle. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 73 :138–191, 1980.

[65] L. Schwartz. *Méthodes mathématiques pour les sciences physiques*. Hermann, Paris, 1979.

[66] V.A. Solonnikov. On green's matrices for elliptic boundary value problems. In *Proc. Steklov Inst. Math.*, volume 110, pages 123–170, 1970.

[67] V.A. Solonnikov. On green's matrices for elliptic boundary value problems. In *Proc. Steklov Inst. Math.*, volume 116, pages 187–226, 1971.

[68] M. Tinnsten, M. Jonsson, and Ö. Johansson. Prediction and verification of acoustic radiation. *Acta acustica*, 87 :117–127, 2001.

Index

RÉSUMÉ

La synthèse par modélisation physique offre une démarche alternative aux techniques de synthèse par modèle de signaux en s'interrogeant sur les causes de la production du son et sur sa propagation. Un objet sonore complexe est décomposé en plusieurs sous-structures élémentaires en interaction. Cette thèse étudie un assemblage de solides élastiques de formes quelconques, isotropes ou anisotropes, couplés les uns aux autres et dont les interactions sont décrites par des conditions aux limites imposées à leur frontière.

Le comportement dynamique d'un de ces solides est régit par un ensemble d'équations qu'il est commode de présenter sous la forme d'une équation variationnelle dont la solution mathématique est proposée sous la forme d'une solution intégrale où figurent explicitement les conditions aux limites. Cette opération est rendue possible par l'introduction du noyau de Poisson vérifiant des condition aux limites bien précises sur la surface de l'objet considéré et qui se révéle être un opérateur d'admittance ou d'impédance bien utile pour traiter les intéractions entre solides.

Ce travail théorique est à l'origine d'un code de calcul numérique qui permet de concevoir des objets sonores de formes arbitraires constitués de matériaux divers. Avant de faire vibrer, ces objets sonores peuvent avoir subit de grandes déformations qui modifieront leurs propriétés vibratoires. Enfin l'utilisateur du logiciel peut coupler ces objets, soit par des assemblages permanents, soit par contact unilateral sans frottement.